

# Table des matières

0. Préliminaires.....	9
◆ ○ 1. Encadrement de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ .....	9
◆ ○ 2. Produit d'entiers consécutifs, pairs, impairs.....	9
◆ ● 3. Autour de la formule du binôme de Newton.....	10
◆ ● 4. Inégalités de Cauchy-Schwarz.....	13
◆ ● 5. Inégalité de Bernoulli.....	15
★ ● 6. Inégalités triangulaires.....	17
★ ● 7. Formule d'inversion de Pascal.....	20
★ ● 8. Applications injectives, surjectives, bijectives – Images directes et images réciproques.....	23
1. Calcul matriciel – Espaces vectoriels – Applications linéaires.....	35
☞ ■ 1. Familles libres, génératrices, bases et applications linéaires.....	35
☞ □ 2. Matrices inversibles, vecteurs ligne et vecteurs colonne.....	38
☞ □ 3. Propriétés du rang.....	40
★ ■ 4. Bases de $\mathbb{R}_n[X]$ .....	41
◆ ■ 5. Familles libres de fonctions.....	44
★ ■ 6. Noyaux et images itérés d'un endomorphisme.....	48
2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.....	52
☞ □ 1. Les propriétés fondamentales.....	52
★ □ 2. Trace d'une matrice.....	56
★ ■ 3. Convergence de suites matricielles.....	59
★ ■ 4. Localisation des valeurs propres d'une matrice, théorèmes de Hadamard et de Gerschgorin.....	62
◆ ■ 5. Étude de quelques matrices particulières.....	65
◆ ■ 6. Matrices stochastiques.....	68
◆ ■ 7. Matrices tridiagonales.....	72
3. Suites.....	75
☞ ○ 1. Suites monotones, suites bornées et convergence.....	75
☞ ○ 2. Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre.....	76
☞ ○ 3. Propriétés autour de la limite de suites.....	77
☞ ● 4. Propriétés des équivalents.....	78
☞ ● 5. Suites extraites.....	80
★ ● 6. Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ . Théorème du point fixe.....	85
★ ● 7. Suites implicites.....	88
◆ ● 8. Limites classiques et équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .....	90
★ ■ 9. Équivalent de $\sum f(k)$ lorsque $f$ est une fonction continue, positive, décroissante.....	96
◆ ● 10. La suite $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et la constante $\gamma$ d'Euler.....	99
★ ● 11. Théorème de Cesàro.....	101
★ ● 12. Méthode de la partie principale.....	109

4. Séries ..... 111

☺	○	1. Convergence, positivité et croissance du reste de séries convergentes.....	111
★	■	2. Séries de Bertrand.....	113
☆	●	3. Théorème de Pringsheim pour les séries.....	115
★	●	4. Théorème des séries alternées.....	116
★	●	5. Règles de D'Alembert.....	117
★	●	6. Règles de Cauchy.....	119
☆	●	7. Règles de Raabe-Duhamel.....	120
★	●	8. Règle d'Abel.....	124
☆	●	9. Produit de Cauchy de deux séries à termes positifs.....	125
☆	●	10. Groupement de termes.....	127
☆	●	11. Séries et relations de comparaison.....	131
◆	○	12. Les séries de Mengoli.....	142
◆	●	13. Les séries $\sum \frac{P(n)}{n!}$ .....	142
◆	○	14. Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{an + b}$ .....	144
◆	●	15. Les séries $\sum \frac{x^n}{n}$ .....	146
◆	●	16. La formule du binôme négatif et les séries $\sum \frac{k!}{(k-r)!} q^{k-r}$ .....	148
★	■	17. Dérivation d'une série de fonctions.....	151

5. Fonctions : limites, continuité, dérivabilité ..... 153

☺	○	1. Premières propriétés.....	153
☺	●	2. Fonctions monotones, fonctions bornées et limites.....	160
❄	○	3. Compatibilité de la limite avec la relation d'ordre.....	163
❄	●	4. Propriétés des équivalents.....	164
★	●	5. Autour de la notion de continuité.....	166
◆	○	6. Dérivées classiques.....	169
★	●	7. Sens de variation de fonctions dérivables.....	171
★	●	8. Formule de Leibniz.....	175
★	●	9. Théorème de Rolle et des accroissements finis.....	176
☆	●	10. Généralisations du théorème de Rolle.....	176
☆	●	11. Généralisation du théorème de prolongement de la dérivée.....	180
★	●	12. Propriétés des fonctions convexes.....	183
◆	●	13. Inégalités de Hölder et de Minkowski.....	190

6. Intégration sur un segment – Formules de Taylor – Développements limités ..... 193

☺	○	1. Les propriétés fondamentales.....	193
◆	●	2. Primitives classiques.....	195
★	●	3. Formule d'intégration par parties itérée.....	198
☆	●	4. Théorème et formules de la moyenne.....	199
☆	●	5. Dérivée symétrique.....	202
◆	●	6. Les intégrales $\left[ \int_a^b (t-a)^p (t-b)^q dt \right]$ .....	204
★	■	7. Dérivation sous le signe intégral.....	206

7. Intégrales impropres ..... 209

☺	■	1. Les propriétés fondamentales.....	209
☺	■	2. Intégrales impropres et suites.....	214
★	■	3. Intégrales de Bertrand.....	219
★	□	4. Autres intégrales de référence.....	220

★ ■	5. Intégrales impropres et relations de comparaison .....	223
★ ■	6. Théorème de Pringsheim intégral .....	234
◆ ■	7. La fonction $\Gamma$ (Gamma) .....	235
★ ■	8. Dérivation sous le signe intégral .....	242

8. Fonctions de deux variables ..... 245

★ ■	1. Dérivée d'une fonction directionnelle .....	245
★ ■	2. Théorème des accroissements finis .....	248
★ ■	3. Condition suffisante pour l'existence d'un extremum global .....	249

9. Dénombrement ..... 252

◆ ●	1. Formule de Pascal itérée (ou formule des colonnes) .....	252
◆ ●	2. Calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$ .....	252
◆ ○	3. Formules sommatoires obtenues par décomposition de coefficients binomiaux .....	254
◆ ○	4. Calcul de $\sum_{k=i}^n k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)$ et $\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2)\dots(k+i-1)$ .....	258
◆ ○	5. Calcul de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$ .....	259
◆ ○	6. Calcul de $\sum_{k=p}^q (-1)^k \binom{q}{k} \binom{k}{p}$ .....	260
◆ ●	7. Formule de Vandermonde .....	261
◆ ●	8. Calcul de $\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q}$ .....	262
★ ●	9. $p$ -listes strictement croissantes et croissantes d'un ensemble de cardinal $n$ .....	264
★ ●	10. Trous de Kaplansky .....	265
★ ●	11. $p$ -listes $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ telles que $\sum_{i=1}^p x_i = n$ . Combinaisons avec répétitions .....	267
★ ●	12. Chemins monotones .....	268
★ ●	13. Permutations laissant $k$ points fixes. Dérangements .....	271
★ ●	14. Surjections d'un ensemble de cardinal $p$ sur un ensemble de cardinal $n$ .....	273
★ ●	15. $p$ -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties de $E$ telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = E$ .....	275
★ ●	16. $p$ -partages d'un ensemble de cardinal $n$ .....	277
★ ●	17. $p$ -partitions et partitions d'un ensemble : nombres de Stirling et nombres de Bell .....	278
★ ●	18. Partitions d'un ensemble de cardinal $np$ en classes de cardinal $p$ .....	281
★ ●	19. Partitions d'un entier .....	282

10. Probabilités classiques ..... 287

★ ●	1. Inégalités de Boole .....	287
★ ●	2. Lemmes de Borel-Cantelli .....	288
◆ ●	3. Les modèles de tirages de boules dans une urne .....	291

11. Variables aléatoires discrètes ..... 295

◆ ●	1. Caractérisation d'une variable aléatoire .....	295
★ ●	2. Moments d'une variable aléatoire en fonction de son anti-fonction de répartition .....	298
★ ○	3. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, n]$ .....	305
★ ●	4. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ .....	307
◆ ●	5. Temps d'attente d'un $r^{\text{ème}}$ succès : loi de Pascal et loi binomiale négative .....	311
◆ ●	6. Temps d'attente d'un $r^{\text{ème}}$ succès lors de tirages sans remise .....	316

12. Couples et suites de variables aléatoires discrètes .....	321
★ ■ 1. Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires discrètes.....	321
◆ ■ 2. Minimum et maximum de variables aléatoires (lors d'une suite de tirages de boules).....	322
◆ ■ 3. Chaînes de Markov .....	334
13. Variables aléatoires à densité .....	338
✱ ■ 1. Les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)} dt$ .....	338
✱ ■ 2. Stabilité de la loi normale par transformation affine.....	339
✱ ■ 3. Indépendance de fonctions de variables aléatoires indépendantes.....	340
★ ■ 4. Espérance d'une variable aléatoire à densité en fonction de son anti-fonction de répartition.....	341
★ ■ 5. Statistiques d'ordre.....	343
★ ■ 6. Fonctions de variables aléatoires à densité .....	345
◆ ■ 7. La loi $\Gamma$ (Gamma).....	352
◆ ■ 8. La loi du khi-deux.....	354
◆ ■ 9. La loi de Laplace.....	356
◆ ■ 10. La loi de Pareto .....	362
◆ ■ 11. La loi de Weibull .....	365
14. Convergences et approximations .....	373
★ ■ 1. Inégalités de Markov.....	373
★ ■ 2. Convergence en probabilité et convergence en loi.....	375
15. Estimation .....	379
◆ ■ 1. Estimation par intervalle du paramètre d'une variable de Bernoulli.....	379
◆ ■ 2. Estimation par intervalle de l'espérance d'une loi normale d'écart-type donné.....	381