

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann	7
1.2	Insuffisances de l'intégrale de Riemann	8
1.2.1	L'espace n'est pas complet	8
1.2.2	Passage à la limite	11
1.2.3	Construction de l'intégrale de Lebesgue	13
1.3	Rappels	15
	Problèmes et Exercices	16
2	Espaces mesurables, fonctions mesurables, mesures	19
2.1	Espaces mesurables	19
2.2	Fonctions mesurables	20
2.3	Mesures	24
2.4	Mesure de Lebesgue	28
2.5	Presque partout	31
2.6	Preuve du théorème de Carathéodory	33
	Problèmes et Exercices	38
3	Intégration des fonctions mesurables	41
3.1	Construction de l'intégrale	41
3.1.1	Fonctions étagées positives	41
3.1.2	Fonctions mesurables positives	43
3.1.3	Fonctions mesurables	46
3.1.4	Intégrale et presque partout	48
3.2	L'espace $L^1(X, d\mu)$	49
3.2.1	Définition	49
3.2.2	Passage à la limite	50
	Problèmes et Exercices	57
4	Compléments sur les fonctions intégrables	63
4.1	Intégrales à paramètres	63
4.2	Théorèmes de Fubini	64
4.3	Changements de variables	66
4.4	Convolution et régularisation	73
4.4.1	Densité de C_c^0 dans L^1	73
4.4.2	Convolution	77
4.4.3	Régularisation	79
4.5	Espaces L^p	81
4.5.1	Définitions	81
4.5.2	Propriétés fondamentales des espaces L^p	83
	Problèmes et Exercices	87

5	Espaces de Hilbert	95
5.1	Définitions	95
5.1.1	Forme hermitienne	95
5.1.2	Produit scalaire	96
5.1.3	Notions de convergence	97
5.1.4	Espace de Hilbert	98
5.2	Orthogonalité ; théorème de projection	99
5.2.1	Orthogonalité	99
5.2.2	Théorème de projection	100
5.2.3	Théorème de Riesz	104
5.3	Bases hilbertiennes, séries de Fourier	108
5.3.1	Bases hilbertiennes	108
5.3.2	Théorème de Parseval	110
5.4	Exemple fondamental : fonctions L^2 périodiques	111
5.5	Ce que le cas hilbertien peut nous apprendre sur les espaces de fonctions intégrables	120
5.5.1	Retour sur la dualité $L^p/L^{p'}$	120
5.5.2	Le théorème de Radon-Nikodym	128
	Problèmes et Exercices	129
6	Transformée de Fourier	133
6.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$	133
6.1.1	Définition	133
6.1.2	Propriétés élémentaires	135
6.2	Algèbre de Wiener	137
6.2.1	Exemple fondamental et lemme d'approximation	137
6.2.2	Algèbre de Wiener	140
6.3	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$	142
6.4	Equation de la chaleur	145
	Problèmes et Exercices	149
7	Théorèmes de compacité dans les L^p	153
7.1	Compléments d'analyse fonctionnelle	153
7.2	Compléments de topologie ; topologies forte, faible et faible- \star	158
7.2.1	Espaces topologiques, espaces métriques, compacité	158
7.2.2	Convergence faible et convergence faible- \star	161
7.2.3	Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki	166
7.3	Critère de compacité faible dans les espaces L^p	169
7.3.1	Les cas $1 < p \leq \infty$	169
7.3.2	Le cas $p = 1$: théorème de Dunford-Pettis	171
7.3.3	Critère pratique	176
7.4	Equicontinuité et compacité	178
7.5	Compacité forte dans L^p	182
7.6	Applications : convergences faible, forte et presque partout ; produits	186
	Bibliographie	189