

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	7
1.1	Rappels sur l'intégrale de Riemann .....	7
1.2	Insuffisances de l'intégrale de Riemann .....	8
1.2.1	L'espace n'est pas complet .....	8
1.2.2	Passage à la limite .....	11
1.2.3	Construction de l'intégrale de Lebesgue .....	13
1.3	Rappels .....	15
	Problèmes et Exercices .....	16
<b>2</b>	<b>Espaces mesurables, fonctions mesurables, mesures</b> .....	19
2.1	Espaces mesurables .....	19
2.2	Fonctions mesurables .....	20
2.3	Mesures .....	24
2.4	Mesure de Lebesgue .....	28
2.5	Presque partout .....	31
2.6	Preuve du théorème de Carathéodory .....	33
	Problèmes et Exercices .....	38
<b>3</b>	<b>Intégration des fonctions mesurables</b> .....	41
3.1	Construction de l'intégrale .....	41
3.1.1	Fonctions étagées positives .....	41
3.1.2	Fonctions mesurables positives .....	43
3.1.3	Fonctions mesurables .....	46
3.1.4	Intégrale et presque partout .....	48
3.2	L'espace $L^1(X, d\mu)$ .....	49
3.2.1	Définition .....	49
3.2.2	Passage à la limite .....	50
	Problèmes et Exercices .....	57
<b>4</b>	<b>Compléments sur les fonctions intégrables</b> .....	63
4.1	Intégrales à paramètres .....	63
4.2	Théorèmes de Fubini .....	64
4.3	Changements de variables .....	66
4.4	Convolution et régularisation .....	73
4.4.1	Densité de $C_c^0$ dans $L^1$ .....	73
4.4.2	Convolution .....	77
4.4.3	Régularisation .....	79
4.5	Espaces $L^p$ .....	81
4.5.1	Définitions .....	81
4.5.2	Propriétés fondamentales des espaces $L^p$ .....	83
	Problèmes et Exercices .....	87

<b>5</b>	<b>Espaces de Hilbert</b> .....	95
5.1	Définitions .....	95
5.1.1	Forme hermitienne .....	95
5.1.2	Produit scalaire .....	96
5.1.3	Notions de convergence .....	97
5.1.4	Espace de Hilbert .....	98
5.2	Orthogonalité ; théorème de projection .....	99
5.2.1	Orthogonalité .....	99
5.2.2	Théorème de projection .....	100
5.2.3	Théorème de Riesz .....	104
5.3	Bases hilbertiennes, séries de Fourier .....	108
5.3.1	Bases hilbertiennes .....	108
5.3.2	Théorème de Parseval .....	110
5.4	Exemple fondamental : fonctions $L^2$ périodiques .....	111
5.5	Ce que le cas hilbertien peut nous apprendre sur les espaces de fonctions intégrables .....	120
5.5.1	Retour sur la dualité $L^p/L^{p'}$ .....	120
5.5.2	Le théorème de Radon-Nikodym .....	128
	Problèmes et Exercices .....	129
<b>6</b>	<b>Transformée de Fourier</b> .....	133
6.1	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ .....	133
6.1.1	Définition .....	133
6.1.2	Propriétés élémentaires .....	135
6.2	Algèbre de Wiener .....	137
6.2.1	Exemple fondamental et lemme d'approximation .....	137
6.2.2	Algèbre de Wiener .....	140
6.3	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ .....	142
6.4	Equation de la chaleur .....	145
	Problèmes et Exercices .....	149
<b>7</b>	<b>Théorèmes de compacité dans les <math>L^p</math></b> .....	153
7.1	Compléments d'analyse fonctionnelle .....	153
7.2	Compléments de topologie ; topologies forte, faible et faible- $\star$ .....	158
7.2.1	Espaces topologiques, espaces métriques, compacité .....	158
7.2.2	Convergence faible et convergence faible- $\star$ .....	161
7.2.3	Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki .....	166
7.3	Critère de compacité faible dans les espaces $L^p$ .....	169
7.3.1	Les cas $1 < p \leq \infty$ .....	169
7.3.2	Le cas $p = 1$ : théorème de Dunford-Pettis .....	171
7.3.3	Critère pratique .....	176
7.4	Equicontinuité et compacité .....	178
7.5	Compacité forte dans $L^p$ .....	182
7.6	Applications : convergences faible, forte et presque partout ; produits .....	186
	<b>Bibliographie</b> .....	189