

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

	page
I - VECTEURS GEOMETRIQUES ET ESPACE \mathbb{R}^3	5
A / Exemple simple.	5
B / Assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux.	6
II - CONVENTION D'ECRITURE ; LA NOTATION D'EINSTEIN	6
A / Indices muets.	6
B / Convention d'Einstein.	7
III - CHANGEMENT DE BASE DANS \mathbb{R}^3	9
IV - FORMES LINEAIRES SUR \mathbb{R}^3 , ESPACE DUAL	12
A / Définitions.	12
B / Coefficients d'une forme linéaire.	14
a) définition.	14
b) influence d'un changement de base dans \mathbb{R}^3 .	14
C / Espace dual de \mathbb{R}^3 .	15
D / Recherche de bases commodes dans l'espace dual.	15
E / Changement de base dans l'espace dual.	17
F / Composantes des vecteurs de \mathbb{R}^{3*} .	17
G / Suites de composantes sur \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^{3*} .	18
a) isomorphisme des deux espaces.	18
b) suites de composantes.	18
c) exemple.	19
H / Espace dual de \mathbb{R}^{3*} .	20

CHAPITRE II
INTRODUCTION DES TENSEURS

I - MULTIPLICATION TENSORIELLE	24
A / Exemple.	24
B / Espace " produit tensoriel " .	25
a) distributivité par rapport à l'addition.	25
b) multiplication par un scalaire λ .	26
c) indépendance linéaire .	26
C / Représentation géométrique de la base (π_{ij}) .	27
D / Comparaison entre produit cartésien et produit tensoriel.	27
E / Interprétation physique des tenseurs.	29
F / La multiplication des tenseurs est-elle commutative ?	29
a) remarque.	29
b) commutativité ?	30
II - GENERALISATION DE LA MULTIPLICATION TENSORIELLE	30
A / Généralisation à \mathbf{R}^n .	30
B / Généralisation à d'autres espaces vectoriels.	31
C / Base standard du produit tensoriel.	32
a) définition.	32
b) changement de base standard.	32
D / Tensorialité d'une suite à deux indices.	33
a) exemple.	33
b) généralisation.	35
c) corollaire.	36
E / Quelques exemples fondamentaux.	36
a) suite des éléments d'une matrice de changement de base.	36
b) suite de Kronecker δ^i mixte.	36

c) suite de Kronecker δ_{ij} , à deux indices de même hauteur.	37
d) le tenseur fondamental et la suite (g_{ij}) .	38
e) la suite (g^{ij}) .	40
F / Vocabulaire et écriture.	42
III - PRODUIT TENSORIEL DE n ESPACES	43
A / Produit de plus de deux espaces.	43
B / Associativité du produit tensoriel.	43
C / Ordre et type d'un tenseur.	44
D / Symétries et antisymétries dans un tenseur.	45
a) symétrie par rapport à deux indices de même hauteur.	45
b) antisymétrie par rapport à deux indices de même hauteur.	45
c) nombre de composantes indépendantes dans un tenseur symétrique ou antisymétrique.	46
d) décomposition d'un tenseur quelconque en une partie symétrique et une partie antisymétrique.	46
E / Tenseurs de même ordre et de même variance.	47
RESUME DU CHAPITRE II	49
EXERCICES	50

CHAPITRE III

OPÉRATIONS SUR LES TENSEURS

I - EGALITE DE DEUX TENSEURS	53
II - ADDITION DE DEUX TENSEURS	53
III - PRODUIT TENSORIEL DE DEUX TENSEURS	53
IV - CONTRACTION D'UN TENSEUR MIXTE	54
A / Définition.	54
B / Théorème.	54
C / Deux cas particuliers importants.	55
D / Contractions successives.	56
E / Multiplication contractée.	57
F / Application critère de tensorialité.	57

G / Abaissement d'un indice.	59
H / Élévation d'un indice.	60
RESUME DU CHAPITRE III	61
EXERCICES	62

CHAPITRE IV

DÉRIVATION EN NOTATION TENSORIELLE

I - POSITION D'UN POINT DANS L'ESPACE	64
A / Repérage du point.	64
B / Changement de base.	64
C / Notion de champ.	65
II - DERIVEES PAR RAPPORT AUX VARIABLES D'ESPACE	65
A / Dérivabilité d'un champ scalaire.	65
B / Divergence d'un champ de vecteur.	66
C / Gradient d'un champ scalaire.	66
D / Rotationnel d'un champ vectoriel.	67
E / Laplacien d'un champ scalaire.	68
III - FONCTION UNIFORME DE n VARIABLES INDEPENDANTES	68
A / Utilisation d'un espace de configuration euclidien.	68
B / Variations d'une fonction le long d'une courbe.	69
C / Cas des fonctions uniformes.	71
a) paramétrage de la courbe.	71
b) représentation unidimensionnelle de f sur la courbe.	71
c) dérivabilité de f en un point de l'espace de configuration.	72
d) différentielle totale de f .	73
IV - CONDITION D'UNIFORMITE DE $f(u^i)$:	
THEOREME DE SCHWARZ	75
A / Condition nécessaire.	75
a) familles de courbes joignant deux points quelconques.	76
b) étude de la variation $f(B) - f(A)$.	77

B / Réciproque.	81
C / Cas des discontinuités.	82
RESUME DU CHAPITRE IV	84
EXERCICES	85

CHAPITRE V

COORDONNÉES CURVILIGNES DÉRIVATION DES CHAMPS DE TENSEURS

I - COORDONNEES RECTILIGNES	86
A / Définition.	86
B / Tensorialité en un point M ; champ de tenseur.	87
C / Différentielle d'un champ de tenseur.	88
II - COORDONNEES CURVILIGNES ; REPERE NATUREL	89
A / Coordonnées curvilignes.	89
B / Lignes-coordonnées.	91
C / Repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes.	91
D / Expression des vecteurs de la base naturelle, en fonction de ceux du repère rectiligne.	94
E / Conditions pour qu'une suite de paramètres constitue un système de coordonnées curvilignes.	95
III - CHAMPS DE TENSEURS EXPRIMES EN COORDONNEES CURVILIGNES	99
A / Changement de base naturelle en un même point.	99
B / Expression de la tensorialité en coordonnées curvilignes.	100
C / Différentielle d'un tenseur, en coordonnées curvilignes.	100
a) les coefficients de Christoffel.	101
b) expression des de^{*i} .	104
c) écriture mnémotechnique de $de^{\vec{j}}$ et de^{*i} .	106
d) expression de la différentielle d'un tenseur.	107
e) écriture mnémotechnique des différentielles absolues.	110
D / Dérivée covariante d'un tenseur	112

IV - VITESSE ET ACCELERATION EN CINEMATIQUE	114
A / Vitesse d'un mobile.	114
B / Accélération du mobile.	114
RESUME DU CHAPITRE V	115
EXERCICES	117

SOLUTION DES EXERCICES

Chapitre I	119
Chapitre II	125
Chapitre III	131
Chapitre IV	136
Chapitre V	140
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE	152