Table des matières

I Généralités sur les groupes de Lie 1

1 Définitions . . . 2
2 Exemples de groupes de Lie . . . 6

II Algèbre de Lie et représentation adjointe 21

1 L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété . . . 21
2 Première forme de la définition de l'algèbre de Lie . . . 24
3 Seconde forme de la définition . . . 25
4 Remarques . . . 26
5 Algèbres de Lie des sous-groupes de Lie et des groupes produit . . . 27
6 La représentation coadjointe . . . 29
7 Exemples d'algèbres de Lie . . . 30
8 Calcul formel en coordonnées dans un groupe de Lie . . . 34
9 Algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe . . . 38

III Formes différentielles de Maurer-Cartan 43

1 Définition des formes droite et gauche . . . 43
2 Parallélisations des fibrés tangent et cotangent d'un groupe de Lie . . . 46
3 Différentielles droites et gauches . . . 47
4 Mesures de Haar sur un groupe de Lie . . . 50

IV L'application exponentielle d'un groupe de Lie 55

1 Sous-groupes à un paramètre et champs de vecteurs invariants . . . 55
2 Définition de l'exponentielle . . . 57
3 Application exponentielle d'un sous-groupe de Lie . . . 59
4 Exemples d'applications exponentielles . . . 60
5 Formule de Taylor dans un groupe de Lie . . . 64
6 Différentielles droite et gauche et dérivées de Lie . . . 65
7 Différentielles de la représentation adjointe . . . 65
8 Différentielles droite et gauche de l'exponentielle . . . 68
9 Coordonnées canoniques . . . 73
10 Formule de Campbell-Hausdorff-Dynkin . . . 74

V Opération d'un groupe de Lie sur une variété 79

1 Généralités sur les opérations de groupes . . . 79
2 Groupe de Lie opérant une variété, champs fondamentaux . . . 81
3 Action de $\mathbb{G}$ sur les fonctions . . . 87
4 Interprétation cinématique . . . 88
5 Action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique . . . 89
6 Fibrés principaux . . . 94

6.1. Construction d'un fibré principal par recolement de fibrés triviaux. 98
6.2. Construction d'un fibré principal à partir d'un cocycle 99
6.3. Théorème d'existence de la structure de fibré principal. 100

VI Homomorphismes et représentations 103
1 Homomorphismes de groupes de Lie 103
2 Représentations linéaires 106
3 Quelques exemples 108
4 Représentations des groupes compacts : compléments 114

VII Produits semi-directs 119
1 Produits semi-directs, aspects algébriques 119
2 Produit semi-direct de groupes de Lie 120
3 Exemples de produits semi-directs 122

VIII Espaces tangent et cotangent d'un groupe de Lie 125
1 Groupe tangent d'un groupe de Lie 125
2 Second groupe tangent d'un groupe de Lie 126
3 Structure symplectique de l'espace cotangent d'un groupe de Lie 128
4 Systèmes hamiltoniens sur $T^*\mathbb{G}$ 130

IX Relations entre sous-groupes et sous-algèbres de Lie 135
1 Introduction 135
2 Sous-groupes intégraux 137
3 Sous-groupes fermés 140
4 Normalisateurs et centralisateurs 143
5 Groupe adjoint d'un groupe de Lie 145
6 Groupe des commutateurs d'un groupe de Lie connexe 146
7 Série dérivée et série centrale d'un groupe de Lie connexe 148
8 Un critère de différentiabilité des homomorphismes 150

X Quotients, espaces homogènes 151
1 Structure différentielle d'un quotient 151
2 Décomposition canonique des homomorphismes de groupes de Lie 158
3 Structure différentielle des orbites 159
4 Structure symplectique des orbites de la représentation coadjointe 162
5 Complément : structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ 165

XI Le groupe de Poincaré d'un groupe de Lie connexe 167
1 Groupe de Poincaré d'un espace topologique, rappels 167
2 Commutativité du groupe de Poincaré d'un groupe de Lie 169
3 Prolongement des homomorphismes locaux 172

XII Revêtements des groupes de Lie 177
1 Généralités sur les revêtements 177
2 Cas des groupes de Lie 181

XIII Groupe des automorphismes d'un groupe de Lie **189**
1 Relation entre $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ et $\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbb{G}})$ . . . 189
2 Relations $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, structure de $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ . . . 190
3 Application aux produits semi-directs . . . 191
4 Compléments . . . 194

XIV Connexions linéaires invariantes sur un groupe de Lie **195**
1 Généralités sur la notion de connexion . . . 195
2 Connexions canoniques . . . 197
3 Connexions bi-invariantes . . . 202
4 Connexion de Levi-Civita associée à une structure riemanienne invariante 203
5 Structures pseudo-riemanniennes bi-invariantes . . . 206
6 Théorème de H. Weyl . . . 209

XV Aperçu sur quelques types de groupes de Lie **211**
1 Détermination des groupes de Lie commutatifs connexes . . . 211
2 Groupes de Lie nilpotents et résolubles . . . 211
2.1. Groupes de Lie nilpotents . . . 212
2.2. Groupes de Lie résolubles . . . 216
2.3. Complément : radical d'un groupe de Lie . . . 217
3 Groupes de Lie semi-simples . . . 218
4 Groupes de Lie compacts : tores maximaux . . . 220
4.1. Tores maximaux d'un groupe de Lie compact. . . . 221
4.2. Théorème de conjugaison des tores maximaux . . . 222
4.3. Centralisateur et normalisateur d'un tore . . . 225
5 Groupes de Lie semi-simples et groupes compacts . . . 228

XVI Géométrie différentielle des fibrés principaux **233**
1 Champs de vecteurs fondamentaux d'un fibré principal . . . 233
2 Connexions dans un fibré principal . . . 234
2.1. Champs de vecteurs horizontaux, relèvements . . . 236
2.2. Courbure d'une connexion principale . . . 238
2.3. Expressions locales d'une connexion . . . 239
3 Fibré des repères et connexions linéaires . . . 240
3.1. Dérivation covariante . . . 243
3.2. Parallèlisme et géodésiques . . . 248

XVII Note historique **249**
1 La notion de groupe . . . 249
2 Sophus Lie . . . 250
2.1. La collaboration entre Lie et Klein . . . 251
2.2. L'influence des travaux de Jacobi . . . 252
2.3. Naissance de la théorie des groupes continus . . . 254
3 Les travaux de Killing sur la classification des algèbres de Lie . . . 257
4 Les travaux d'Elie Cartan sur les algèbres de Lie . . . 259
5 Autres travaux sur les algèbres de Lie . . . 260
6 De la théorie locale à la théorie globale . . . 261
7 Lie et les mathématiciens de Paris du début du XXème siècle . . . 263
8 Travaux sur les fibrés principaux et physique . . . 264

A Généralités sur les algèbres de Lie **265**
1 Définitions . . . 265
2 Série centrale et série dérivée d'une algèbre de Lie . . . 269
3 Extension du corps des scalaires d'une algèbre de Lie . . . 271
4 Formes réelles d'une algèbre de Lie complexe . . . 273
5 Représentations linéaires d'algèbres de Lie . . . 274
6 Formes bilinéaires invariantes sur une algèbre de Lie, forme de Killing . . . 277
7 Algèbres de Lie semi-simples . . . 279
8 Représentations semi-simples . . . 283
9 Produit semi-direct d'algèbres de Lie . . . 283
10 Théorèmes de Levi-Maltsev et d'Ado . . . 284
11 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie . . . 285

B Généralités sur les groupes topologiques **287**
1 Définitions . . . 287
1.1. Sous-groupes topologiques . . . 288
1.2. Groupes quotients . . . 289
2 Groupe topologique opérant continûment . . . 290
3 Groupe localement compact opérant proprement . . . 291
4 Sous-groupes et groupes quotients du groupe $\mathbb{R}^n$ . . . 294
4.1. Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$ . . . 294
4.2. Sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ . . . 296
4.3. Sous-groupes de $\mathbb{Z}^n$ . . . 297
4.4. Sous-groupes associés de $\mathbb{R}^n$ . . . 299
4.5. Structure des groupes quotient de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{T}^n$ . . . 300
4.6. Image dans $\mathbb{T}^n$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ . . . 302

C Variétés différentielles **303**
1 Fonctions analytiques . . . 303
2 Variétés différentielles . . . 307
3 Fibrés vectoriels . . . 308
4 Subimmersions, immersions, submersions . . . 312
4.1. Structure locale des subimmersions . . . 313
4.2. Deux critères de différentiabilité . . . 314
5 Sous-variétés et sous-variétés immergées . . . 315
6 Théorème du plongement . . . 318
7 Systèmes différentiels . . . 320
7.1. Théorème de Frobenius . . . 320
7.2. Structure des intégrales d'une distribution involutive . . . 323
7.3. Un critère de différentiabilité . . . 325

Exercices **327**

Bibliographie **365**

Index **367**