

Noureddine El Jaouhari

# Introduction à l'analyse complexe

320 exercices corrigés  
avec rappels de cours

L3  
M1  
Agrégation

ellipses



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Rappels sur <math>\mathbb{C}</math> et sa topologie</b> | <b>9</b>  |
| 1.1      | Structure algébrique de $\mathbb{C}$                       | 9         |
| 1.1.1    | Module et argument d'un nombre complexe                    | 10        |
| 1.1.2    | Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe                    | 12        |
| 1.2      | Interprétation géométrique des nombres complexes           | 13        |
| 1.3      | Droites et cercles   | 14        |
| 1.3.1    | Droites  | 14        |
| 1.3.2    | Cercles  | 14        |
| 1.4      | Transformations remarquables du plan complexe              | 16        |
| 1.4.1    | Translations   | 16        |
| 1.4.2    | Homothéties  | 16        |
| 1.4.3    | Rotations  | 16        |
| 1.4.4    | Similitudes  | 16        |
| 1.4.5    | Inversion  | 17        |
| 1.5      | Structure topologique de $\mathbb{C}$                      | 18        |
| 1.5.1    | Connexité  | 18        |
| 1.5.2    | Suites de nombres complexes                                | 19        |
| 1.6      | Les fonctions d'une variable complexe                      | 20        |
| 1.6.1    | Limites et continuité                                      | 20        |
| 1.6.2    | Continuité de la fonction argument                         | 21        |
| 1.6.3    | Limites supérieures et limites inférieures                 | 22        |
| 1.6.4    | Produits infinis de nombres complexes                      | 22        |
| 1.7      | Convergence simple et uniforme                             | 23        |
| 1.7.1    | Convergence simple   | 23        |
| 1.7.2    | Convergence uniforme                                       | 24        |
| 1.7.3    | Convergence normale  | 24        |
| 1.8      | Plan complexe étendu et sphère de Riemann                  | 25        |
| 1.8.1    | Sphère de Riemann  | 25        |
| 1.9      | Exercices  | 27        |
| 1.10     | Solutions  | 30        |
| <b>2</b> | <b>Les fonctions holomorphes</b>                           | <b>57</b> |
| 2.1      | Les fonctions $\mathbb{C}$ -différentiables                | 57        |
| 2.2      | Opérations sur les fonctions $\mathbb{C}$ -différentiables | 59        |
| 2.3      | Fonctions holomorphes                                      | 60        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.4      | Le système d'équations de Cauchy-Riemann . . . . .                                      | 61         |
| 2.5      | Fonctions harmoniques . . . . .   | 64         |
| 2.6      | Propriétés géométriques des fonctions holomorphes . . . . .                             | 67         |
| 2.6.1    | Conservation des angles et de l'orientation.<br>Le point de vue de Riemann . . . . .    | 67         |
| 2.6.2    | Interprétation géométrique de la conservation des angles . . . . .                      | 68         |
| 2.7      | Applications biholomorphes . . . . .  | 69         |
| 2.7.1    | Théorème d'inversion locale holomorphe ou critère de biholomorphisme<br>local . . . . . | 70         |
| 2.8      | Exercices . . . . .   | 71         |
| 2.9      | Solutions . . . . .   | 77         |
| <b>3</b> | <b>Les fonctions holomorphes élémentaires</b>   | <b>109</b> |
| 3.1      | La fonction exponentielle . . . . .   | 109        |
| 3.2      | Fonctions trigonométriques et hyperboliques . . . . .                                   | 112        |
| 3.3      | La fonction logarithme . . . . .  | 114        |
| 3.4      | Fonctions puissances . . . . .  | 118        |
| 3.5      | Fonctions homographiques ou de Möbius . . . . .   | 119        |
| 3.6      | Exercices . . . . .   | 122        |
| 3.7      | Solutions . . . . .   | 126        |
| <b>4</b> | <b>Les fonctions analytiques</b>  | <b>153</b> |
| 4.1      | Rappels sur les séries entières . . . . .   | 153        |
| 4.1.1    | Généralités . . . . .   | 153        |
| 4.1.2    | Opérations sur les séries entières . . . . .  | 155        |
| 4.2      | Holomorphie de la somme d'une série entière . . . . .                                   | 156        |
| 4.3      | Fonctions analytiques . . . . .   | 158        |
| 4.4      | Principe du prolongement analytique . . . . .   | 160        |
| 4.5      | Principe des zéros isolés . . . . .   | 162        |
| 4.6      | Fonctions génératrices . . . . .  | 163        |
| 4.7      | Liens entre fonctions $\mathbb{C}$ -analytiques et $\mathbb{R}$ -analytiques . . . . .  | 164        |
| 4.8      | Exercices . . . . .   | 165        |
| 4.9      | Solutions . . . . .   | 171        |
| <b>5</b> | <b>Intégration complexe. Théorèmes de Cauchy</b>  | <b>205</b> |
| 5.1      | Rappels sur les chemins . . . . .   | 205        |
| 5.2      | Intégrales le long d'un chemin . . . . .  | 208        |
| 5.2.1    | Changements de paramètres . . . . .   | 210        |
| 5.2.2    | Changements de variables . . . . .  | 210        |
| 5.2.3    | Intégrales le long d'un chemin sans fin . . . . .                                       | 211        |
| 5.2.4    | Propriétés des intégrales le long des chemins . . . . .                                 | 211        |
| 5.2.5    | Longueurs des chemins . . . . .   | 211        |
| 5.2.6    | Propriétés de passage à la limite . . . . .   | 212        |
| 5.3      | Liens entre primitives et intégrales complexes . . . . .                                | 213        |
| 5.4      | Théorème de Cauchy pour les ouverts étoilés . . . . .                                   | 215        |
| 5.5      | Formule intégrale de Cauchy . . . . .   | 215        |
| 5.5.1    | Indice d'un lacet par rapport à un point . . . . .                                      | 215        |
| 5.6      | Formule intégrale de Cauchy pour les ouverts étoilés . . . . .                          | 218        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 5.7      | Exercices . . . . .  | 220        |
| 5.8      | Solutions . . . . .  | 231        |
| <b>6</b> | <b>Conséquences des formules de Cauchy</b>   | <b>287</b> |
| 6.1      | Formule de la moyenne . . . . .  | 287        |
| 6.2      | Estimations de Cauchy . . . . .  | 288        |
| 6.3      | Séries et intégrales des fonctions holomorphes . . . . .                                       | 288        |
| 6.4      | Principe du maximum . . . . .  | 290        |
| 6.5      | Théorème de l'application ouverte . . . . .  | 291        |
| 6.6      | Existence des déterminations du logarithme . . . . .   | 291        |
| 6.7      | Forme locale normale d'une fonction holomorphe . . . . .                                       | 292        |
| 6.8      | Lemme de Schwarz . . . . .   | 292        |
| 6.9      | Exercices . . . . .  | 292        |
| 6.10     | Solutions . . . . .  | 295        |
| <b>7</b> | <b>Généralisations des théorèmes de Cauchy</b>   | <b>313</b> |
| 7.1      | Théorèmes homologiques de Cauchy . . . . .   | 313        |
| 7.1.1    | Chaînes et cycles . . . . .  | 313        |
| 7.2      | Théorèmes homotopiques de Cauchy . . . . .   | 315        |
| 7.2.1    | Homotopie et simple connexité . . . . .  | 315        |
| 7.3      | Exercices . . . . .  | 317        |
| 7.4      | Solutions . . . . .  | 318        |
| <b>8</b> | <b>Singularités des fonctions holomorphes</b>  | <b>321</b> |
| 8.1      | Développements en série de Laurent . . . . .   | 321        |
| 8.2      | Singularités des fonctions holomorphes . . . . .   | 324        |
| 8.3      | Les résidus . . . . .  | 326        |
| 8.4      | Calcul pratique des résidus . . . . .  | 327        |
| 8.4.1    | Cas d'un pôle simple . . . . .   | 327        |
| 8.4.2    | Cas d'un pôle d'ordre $m > 1$ . . . . .  | 327        |
| 8.5      | Calcul des intégrales par la méthode des résidus . . . . .                                     | 328        |
| 8.5.1    | Calcul des intégrales $\int_0^{2\pi} R(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) d\vartheta$ . . . . . | 328        |
| 8.5.2    | Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . . . . .                             | 328        |
| 8.5.3    | Calcul des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$ . . . . .                     | 329        |
| 8.5.4    | Calcul des intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)x^{a-1} dx$ . . . . .                              | 329        |
| 8.5.5    | Valeurs principales de Cauchy . . . . .  | 330        |
| 8.5.6    | Calcul des sommes de séries par les résidus . . . . .  | 330        |
| 8.6      | Singularités et résidus à l'infini . . . . .   | 331        |
| 8.7      | Conséquences du théorème des résidus . . . . .   | 332        |
| 8.7.1    | Principe de l'argument . . . . .   | 332        |
| 8.7.2    | Théorème de Rouché . . . . .   | 333        |
| 8.8      | Transformation de Laplace . . . . .  | 333        |
| 8.8.1    | Inversion de la transformation de Laplace . . . . .  | 336        |

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 8.9       | Exercices   | 337        |
| 8.10      | Solutions   | 350        |
| <b>9</b>  | <b>Séries de fonctions méromorphes</b>                          | <b>451</b> |
| 9.1       | Décomposition en « éléments simples » des fonctions méromorphes | 453        |
| 9.2       | Produits infinis de fonctions holomorphes                       | 454        |
| 9.3       | Exercices   | 457        |
| 9.4       | Solutions   | 460        |
| <b>10</b> | <b>Géométries non euclidiennes</b>                              | <b>477</b> |
| 10.1      | Rappels historiques   | 477        |
| 10.2      | Modèles du plan hyperbolique                                    | 478        |
| 10.2.1    | Demi-plan de Poincaré   | 478        |
| 10.2.2    | Disque de Poincaré  | 481        |
| 10.3      | Exercices   | 482        |
| 10.4      | Solutions   | 484        |