Noureddine El Jaouhari

Introduction à l'analyse complexe

320 exercices corrigés avec rappels de cours

L3
M1
Agrégation

ellipses

Chapitre 1

Rappels sur $\mathbb{C}$ et sa topologie

Nous introduisons dans ce premier chapitre les bases sur lesquelles nous développerons la théorie des fonctions d'une variable complexe, à commencer par le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ; nous examinerons ses structures algébrique et topologique.

Historiquement, le terme **complexe(s)** a été introduit pour la première fois par C. F. Gauss, où jusqu'alors les nombres ainsi désignés étaient appelés **imaginaires**.

L'apparition de ces nombres remonte à la Renaissance où des algébristes italiens, en particulier, G. Cardano et R. Bombelli, ont établi les règles de leur manipulation qu'ils ont appliqué à la résolution des équations du deuxième et troisième degré. Mais c'est L. Euler qui a poussé le plus loin possible les manipulations avec les nombres complexes, il suffit de rappeler sa belle et mystérieuse formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+1=0$ unissant l'arithmétique représentée par 1, l'algèbre par i, l'analyse par e et enfin la géométrie par π.

1.1 Structure algébrique de $\mathbb{C}$

Théorème 1.1.1. *Il existe un corps noté $\mathbb{C}$ possédant les propriétés suivantes :*

1. *Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*
2. *L'équation $X^2+1=0$ possède dans $\mathbb{C}$ exactement deux solutions.*
3. *Si i est l'une des solutions de l'équation précédente (l'autre étant forcément $-\mathrm{i}$), l'application $\Phi(x\,,y)=x+\mathrm{i}\,y$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.*

Le corps $\mathbb{C}$ est appelé corps des **nombres complexes**.

On notera que $\mathbb{C}$ étant un corps, il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Nous déterminerons dans la partie exercices, les applications $\mathbb{C}$-linéaires et $\mathbb{R}$-linéaires.

Dans l'écriture $z=x+\mathrm{i}\,y$ d'un nombre complexe z, le nombre $x\in\mathbb{R}$ est appelé **partie réelle** de z et il est désigné par $\mathrm{Re}(z)$; de même, $y\in\mathbb{R}$ est appelé **partie imaginaire** de z et il est désigné par $\mathrm{Im}(z)$.

Le **conjugué** du nombre complexe $z=x+\mathrm{i}\,y$ est le nombre complexe $\overline{z}=x-\mathrm{i}\,y$.

Les nombres complexes tels que $\mathrm{Re}(z)=0$ sont appelés **nombres imaginaires purs**.

1.1.1 Module et argument d'un nombre complexe

Pour des nombres complexes $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$, le nombre réel

$$\langle z\,,\, z'\rangle = \mathrm{Re}\left(\bar{z}z'\right) = \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = xx' + yy' \tag{1.1}$$

définit un **produit scalaire** dans $\mathbb{C}$ qui n'est autre que le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.
La norme associée, notée, $|z| = |x + \mathrm{i}\,y| = \sqrt{\langle z\,,\, z\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$, est appelée **module** du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$.
Nous avons les propriétés classiques suivantes :

— $|z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|$.
L'égalité a lieu si, et seulement si, ou bien $z = 0$ ou il existe $t \geqslant 0$ tel que $z' = tz$.

— $|z \pm z'| \geqslant \big||z| - |z'|\big|$.
Ces deux inégalités constituent ce qu'on appelle **les inégalités triangulaires**.

— $|\langle z\,,\, z'\rangle| \leqslant |z| \cdot |z'|$ (**inégalité de Cauchy-Schwarz**).
En particulier, $\dfrac{\langle z\,,\, z'\rangle}{|z| \cdot |z'|} \in [-1\,,\, 1]$, si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

— $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ (**identité du parallélogramme**).

Dans tout ce qui suit, nous supposerons connues la fonction exponentielle réelle exp, les fonctions trigonométriques sin, cos, etc. ainsi que leurs inverses Arcsin, Arccos, etc.
Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.
Cet ensemble muni de la multiplication des nombres complexes est un groupe, c'est en fait, un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*\,,\,.)$ où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Soit $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ l'application définie pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ par [1] $e(\vartheta) = \cos(\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(\vartheta)$.
La fonction e possède les propriétés immédiates suivantes :

— $e(0) = e(2\pi) = 1$; $e\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$; $e(\pi) = -1$;

— $\forall\, \vartheta \in \mathbb{R}, \quad e(-\vartheta) = \dfrac{1}{e(\vartheta)} = \overline{e(\vartheta)}$;

— $\forall\, \vartheta \in \mathbb{R}, \quad |e(\vartheta)| = 1$.

Théorème 1.1.2. *1. L'application e est une bijection de l'intervalle* $]-\pi\,,\,\pi]$ *sur* $\mathbb{U}$.

2. *L'application* $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ *est un homomorphisme surjectif du groupe additif* $(\mathbb{R}\,,\,+)$ *sur le groupe multiplicatif* $(\mathbb{U}\,,\,.)$ *de noyau* $\mathrm{Ker}(e) = 2\pi\mathbb{Z}$.
Ce morphisme induit un isomorphisme $\widetilde{e}$ *entre les groupes* $\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +\big)$ *et* $(\mathbb{U}\,,\,.)$*, donné pour tout* $\vartheta + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$*, par* $\widetilde{e}\big(\vartheta + 2\pi\mathbb{Z}\big) = e(\vartheta) = \cos(\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(\vartheta)$.

Notons, en particulier, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\vartheta \in \mathbb{R}$, on a la relation

$$\big(\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(\vartheta)\big)^n = \cos(n\,\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(n\,\vartheta), \tag{1.2}$$

appelée **formule de De Moivre**.

Définition 1.1.1. *Soit z dans* $\mathbb{C}^*$*, un nombre réel* ϑ *est appelé* ***un argument*** *de z, s'il satisfait à la relation :* $e(\vartheta) = \dfrac{z}{|z|}$ *ou bien* $z = |z|\,(\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(\vartheta))$.

1. Tant que nous n'avons pas défini l'exponentiation z^w des nombres complexes (qui sera faite au chapitre III), nous éviterons l'utilisation de l'écriture $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}$.

Cette dernière relation est appelée **représentation trigonométrique** (ou **représentation polaire**) du nombre complexe z ou bien que $\big(|z|\,,\,\vartheta\big)$ sont les **coordonnées polaires** de z.
L'ensemble de tous les arguments d'un $z \neq 0$ est noté par $\arg(z)$, donc :

$$\arg(z) = e^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \left\{\vartheta \in \mathbb{R} \quad ; \quad e(\vartheta) = \frac{z}{|z|}\right\}.$$

D'après le théorème précédent, nous savons que $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ est une surjection, donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $e^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right) \neq \emptyset$, ainsi, tout nombre complexe non nul a au moins un argument.
En fait, par le même théorème, il en a une infinité, puisque si $\vartheta_0 \in \arg(z)$, on a l'inclusion $\vartheta_0 + 2\pi\mathbb{Z} \subseteq \arg(z)$. D'autre part, si $\vartheta_0 \in \arg(z)$ et si $\vartheta \in \arg(z)$ alors $e(\vartheta) = \frac{z}{|z|} = e(\vartheta_0)$, donc $e(\vartheta - \vartheta_0) = 1$, i.e. $\vartheta - \vartheta_0 \in \mathrm{Ker}(e) = 2\pi\mathbb{Z}$. Finalement,

$$\arg(z) = \big\{\vartheta_0 + 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}\big\} = \vartheta_0 + 2\pi\mathbb{Z} \tag{1.3}$$

En langage de théorie des groupes, $\arg(z)$ est une classe modulo le sous-groupe $\mathrm{Ker}(e) = 2\pi\mathbb{Z}$ et $\arg(z)$ est alors un élément du groupe-quotient $\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,,+\big)$.
Par exemple, $\arg(-1) = \big\{\pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\big\} = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et d'une façon générale,

$$z \in \mathbb{R}^* \quad \Longleftrightarrow \quad \arg(z) = \pi\mathbb{Z} \tag{1.4}$$

Quand on dira que ϑ est un **choix** ou une **valeur** de $\arg(z)$, cela signifie simplement que ϑ est dans l'ensemble $\arg(z)$.

Proposition 1.1.1. *Soient z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*$ et $(\vartheta_1\,,\,\vartheta_2) \in \arg(z_1) \times \arg(z_2)$, alors*

1. $\vartheta_1 + \vartheta_2 \in \arg(z_1 \cdot z_2)$ *ou bien que* $\vartheta_1 + \vartheta_2$ *est un choix de* $\arg(z_1 \cdot z_2)$ *;*
2. $\vartheta_1 - \vartheta_2 \in \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ *;*
3. *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle semi-ouvert de de longueur 2π (donc $I = [\vartheta_0\,,\,\vartheta_0 + 2\pi[$ ou bien $I =]\vartheta_0\,,\,\vartheta_0 + 2\pi]$ pour un ϑ_0 dans $\mathbb{R}$) et si z est un complexe non nul, alors l'ensemble $\arg(z) \cap I$ est réduit à un seul élément que nous appellerons* ***l'argument de** z **dans** I* *et que nous noterons $\mathrm{Arg}_I(z)$, ainsi $\arg(z) \cap I = \big\{\mathrm{Arg}_I(z)\big\}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.*

Les deux premiers résultats de cette proposition peuvent se traduire par les deux égalités ensemblistes [2] : $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Définition 1.1.2. *On appelle* ***argument principal*** *d'un nombre complexe non nul z et on le note $\mathrm{Arg}(z)$, l'unique réel de $\arg(z) \cap\,]-\pi\,,\,\pi]$.*

On notera que pour tout réel $s > 0$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\mathrm{Arg}(s\,z) = \mathrm{Arg}(z)$.
En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \mathrm{Arg}(z)$.

2. On rappelle que pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on définit les deux sous-ensembles $A \pm B \subseteq \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) comme étant $A \pm B = \big\{a \pm b \ ; \ a \in A\,,\,b \in B\big\}$.

Il n'est pas difficile de voir que

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{si } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0, \\ \\ \pi - \varphi(z), & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0, \\ \\ -\pi - \varphi(z) & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

où $\varphi(z) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right)$ pour [3] tout $z \in \mathbb{C}^*$.

On peut également montrer sans difficulté que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, on a

$$\operatorname{Arg}(z) = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z| + \operatorname{Re}(z)}\right), \tag{1.6}$$

où $\operatorname{Arctan}(t)$ est l'unique réel ϑ de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\vartheta) = t$.

Une des conséquences immédiates de (1.6) est que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\operatorname{Arg}(\overline{z}) = \begin{cases} -\operatorname{Arg}(z), & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-, \\ \\ \pi & \text{si } z \in \mathbb{R}^{*-}. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.1.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Théorème 1.1.3. *Si n est un entier $\geqslant 2$ et $a \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble de nombres complexes*

$$\mathscr{R}_n(a) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ z^n = a\},$$

*possède n éléments, appelés **racines n-ièmes de** a et ils sont donnés par :*

$$\mathscr{R}_n(a) = \left\{\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\ ;\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$$

où $\vartheta \in \arg(a)$.

On évitera d'utiliser, sans précaution, le symbole ambigu $\sqrt{a}$ (où d'une manière générale $\sqrt[n]{a}$) lorsque a est dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$, car contrairement au cas où a est un réel positif pour lequel $\sqrt{a}$ désigne l'**unique** racine carrée **positive** de a, cette notion n'a plus de sens dans $\mathbb{C}$, puisqu'il n'existe aucune structure d'ordre total dans $\mathbb{C}$ compatible avec sa structure de corps.

Cependant, lorsque le symbole $\sqrt{a}$ est utilisé, il désignera toujours ce qu'on appelle la **racine carrée principale** de a, c'est-à-dire celle des deux racines carrées qui a une partie réelle positive (i.e. $\sqrt{a} = \sqrt{|a|}\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$, où $\vartheta = \operatorname{Arg}(a)$), cela ne souffre d'aucune ambiguité, surtout que pour $a > 0$, on obtient la racine carrée positive du réel a.

Si on prend $a = 1$ dans le théorème précédent, on peut choisir $\vartheta = 0$ et les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_n = \mathscr{R}_n(1) = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\ ;\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\right\}$, sont appelés **racines n-ièmes de l'unité**; il s'agit d'un sous-groupe cyclique de $(\mathbb{C}^*, .)$ engendré par l'élément $\omega_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

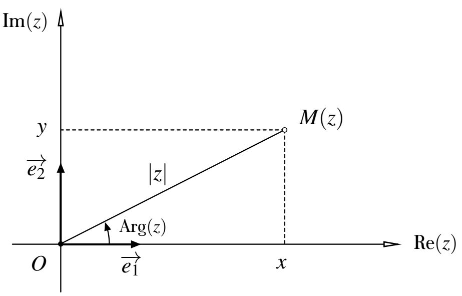
3. Où, pour $t \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arcsin}(t)$ est l'unique réel ϑ du segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\vartheta) = t$.

On a clairement, $\mathbb{U}_2 = \{-1\,,\,1\}$; $\mathbb{U}_3 = \{1\,,\,\mathrm{j}\,,\,\mathrm{j}^2\}$, avec $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathbb{U}_4 = \{-1\,,\,1\,,\,\mathrm{i}\,,\,-\mathrm{i}\}$.
Un nombre complexe ζ est qualifiée de **racine n-ième primitive** de l'unité, si $\zeta^n = 1$ et $\zeta^k \neq 1$, pour tout entier k strictement compris entre 0 et n.
Autrement dit, n est le plus petit entier strictement positif pour lequel l'égalité $\zeta^n = 1$ est vérifiée ; notons que $\zeta = \omega_n$ est une racine n-ième primitive de l'unité ; ainsi, j est une racine cubique primitive de l'unité.

Théorème 1.1.4 (de d'Alembert-Gauss ou théorème fondamental de l'algèbre).
*Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ (les $a_j \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$) un polynôme complexe de degré $n \geqslant 1$, alors f est une **surjection** de $\mathbb{C}$ sur lui-même ou $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.*
En particulier, l'équation $P(z) = 0$ possède au moins une solution.

1.2 Interprétation géométrique des nombres complexes

Soient $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté, $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ le plan vectoriel associé et $\mathscr{R} = (O\,,\,\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.
Désignons par $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{P}$ l'application qui associe à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ le point M de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x\,,\,y)$ dans le repère $\mathscr{R}$, i.e. $M = O + x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$.
Il est clair que φ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathscr{P}$.
De même, l'application $\overrightarrow{\varphi} : \mathbb{C} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ associe le vecteur $\overrightarrow{V} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.



Si $z \in \mathbb{C}$, le point $\varphi(z) = M$ (resp. le vecteur $\overrightarrow{\varphi}(z) = \overrightarrow{V}$) est appelé **image** (resp. **image vectorielle**) de z dans $\mathscr{P}$ (resp. dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$) et pour tout point $M \in \mathscr{P}$ (resp. $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$), le nombre complexe $\varphi^{-1}(M)$ (resp. $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\overrightarrow{V})$) est appelé **affixe** du point M (resp. du vecteur $\overrightarrow{V}$).
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(z) = \varphi(0) + \overrightarrow{\varphi}(z)$.
Des définitions précédentes il résulte que si M et N sont dans $\mathscr{P}$ d'affixes z et z', alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ est $z' - z$.
On peut interpréter le module $|z| = |x + \mathrm{i}\,y| = \sqrt{x^2 + y^2}$ du nombre complexe z d'image M dans $\mathscr{P}$ comme étant la distance euclidienne $\|\overrightarrow{OM}\|$ de O à M et si $z \neq 0$, l'ensemble $\arg(z)$ des arguments de z, représente l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{OM})$.
D'une manière générale, si A et B représentent deux points distincts du plan d'affixes a et b, $\arg(b - a)$ représente l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{e_1}\,,\,\overrightarrow{AB})$.

Pour trois points A, B et C deux à deux distincts d'affixes respectifs a, b et c, $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)$ représente l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
Le plan $\mathscr{P}$ est appelé **plan complexe** ou **plan d'Argand-Cauchy** ou, parfois, **plan de Gauss**.
La correspondance biunivoque entre les nombres complexes et les points de $\mathscr{P}$, permet de transférer sur $\mathbb{C}$ des propriétés géométriques définies sur $\mathscr{P}$ et, réciproquement, toute relation entre nombres complexes possède une traduction géométrique dans le plan $\mathscr{P}$.

1.3 Droites et cercles

1.3.1 Droites

Toute droite D du plan complexe d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, avec α, β et γ des réels vérifiants la relation $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, peut s'écrire à l'aide du nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ sous la forme $\alpha\frac{z+\overline{z}}{2}+\beta\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}+\gamma=0$ ou, en posant $a=\frac{\alpha+\mathrm{i}\beta}{2}\in\mathbb{C}^*$, $\overline{a}z+a\overline{z}+\gamma=0$, que l'on peut écrire aussi : $\mathrm{Re}(\overline{a}z)=-\frac{\gamma}{2}$. En particulier, $\mathrm{Re}(\overline{a}z)=0$ représente une droite passant par O.
Réciproquement, si $a\in\mathbb{C}^*$ et $\gamma\in\mathbb{R}$, toute relation de la forme $\overline{a}z+a\overline{z}+\gamma=0$, représente l'équation d'une droite du plan complexe, d'équation cartésienne $\mathrm{Re}(a)x+\mathrm{Im}(a)y=-\frac{\gamma}{2}$.
Si $\overline{a}\neq a$ (droite non verticale), la **pente** de la droite définie par $\overline{a}z+a\overline{z}+\gamma=0$ est

$$m=-\frac{\alpha}{\beta}=-\mathrm{i}\frac{a+\overline{a}}{a-\overline{a}}=-\frac{\mathrm{Re}(a)}{\mathrm{Im}(a)}.$$

On notera que si A et B sont des points distincts du plan complexe d'affixes respectifs a et b, la droite (AB) contenant A et B a comme équation, $(\overline{a}-\overline{b})z-(a-b)\overline{z}+a\overline{b}-\overline{a}b=0$.

1.3.2 Cercles

Si $\mathscr{C}_{\Omega,R}$ est le cercle centré au point $\Omega(a, b)$ et de rayon R, son équation cartésienne est donc $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, que l'on peut traduire pour $z=x+\mathrm{i}y$ par $|z-\omega|=R$, où $\omega=a+\mathrm{i}b$ est l'affixe du centre Ω.
La dernière relation étant équivalente à $|z-\omega|^2=R^2$ ou $(z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})=R^2$, nous pouvons encore écrire l'équation du cercle $\mathscr{C}_{\Omega,R}$ sous la forme, $z\overline{z}-\overline{\omega}z-\omega\overline{z}+\omega\overline{\omega}-R^2=0$.

Exemple 1.3.1. On considère dans le plan $\mathscr{P}$ deux points distincts A et B et un réel $k>0$.
Cherchons l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ pour lesquels on a, $\frac{MA}{MB}=k$.
Nous distinguerons deux cas :

— $k=1$, notre relation s'écrit $MA=MB$, donc M parcourt la médiatrice du segment $[A, B]$.
— $k\neq 1$, notons par a et b les affixes respectifs de A et B, alors la relation $\frac{MA}{MB}=k$ se traduit par $\frac{|z-a|}{|z-b|}=k$ ou $|z-a|^2=k^2|z-b|^2$ ou $(z-a)(\overline{z}-\overline{a})=k^2(z-b)(\overline{z}-\overline{b})$.
Ainsi, après simplification,

$$(1-k^2)z\overline{z}-\overline{(a-k^2b)}z-(a-k^2b)\overline{z}+|a|^2-k^2|b|^2=0$$

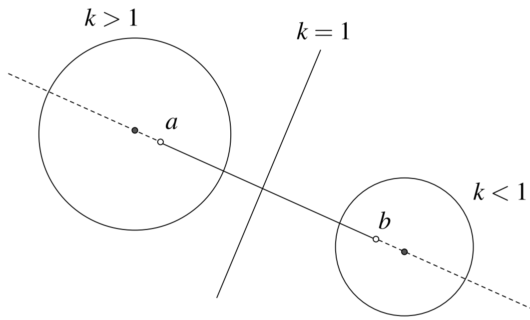
ou

$$z\bar{z} - \frac{\overline{(a-k^2 b)}}{(1-k^2)} z - \frac{(a-k^2 b)}{(1-k^2)} \bar{z} + \frac{|a|^2 - k^2 |b|^2}{(1-k^2)} = 0$$

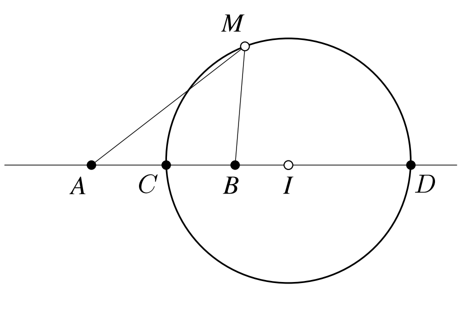
que l'on peut écrire sous la forme $\left| z - \frac{(a-k^2 b)}{(1-k^2)} \right|^2 = \frac{k^2}{(1-k^2)^2} |a-b|^2$, ou

$$\left| z - \frac{(a-k^2 b)}{(1-k^2)} \right| = \frac{k}{\left|1-k^2\right|} |a-b|$$

relation qui nous montre que l'image de z parcourt le cercle centré au point I d'affixe $z_I = \frac{(a-k^2 b)}{(1-k^2)}$ et de rayon $R = \frac{k}{\left|1-k^2\right|} |a-b|$.



Il s'agit de ce qu'on appelle **cercle d'Apollonios** du segment $[A\,,B]$ et de rapport k.
On notera que le diamètre CD de ce cercle est tel que les points C et D sont, respectivement, les barycentres de A et B affectés des coefficients k et ± 1.



Par ailleurs, on peut voir, d'après ce qui précède, que

$$IA \cdot IB = R^2 = \frac{k^2}{(1-k^2)^2} |a-b|^2$$

et cela signifie que les points A et B sont inverses l'un de l'autre par l'inversion de pôle I et de rapport R (cf. (1.4.5)).

1.4 Transformations remarquables du plan complexe

Toute bijection $\varphi : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ du plan complexe $\mathscr{P}$ dans lui-même est souvent qualifiée de **transformation** du plan.
Comme on l'a signalé ci-dessus, la correspondance biunivoque entre les nombres complexes et les points de $\mathscr{P}$, permet d'associer à toute transformation du plan $\varphi : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$, une bijection $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, en associant au complexe z d'image $M \in \mathscr{P}$, l'affixe $z' = f(z)$ du point $\varphi(M)$.

1.4.1 Translations

Si $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ est un vecteur fixe du plan, la **translation** $\mathscr{T}_{\overrightarrow{V}}$ de vecteur $\overrightarrow{V}$ est la transformation du plan qui associe à tout point $M \in \mathscr{P}$, le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$.
Si a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{V}$, la bijection $\mathsf{T}_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ associée est celle qui applique $z \in \mathbb{C}$ sur le nombre complexe $\mathsf{T}_a(z) = z' = z + a$.

1.4.2 Homothéties

On appelle **homothétie** de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, la transformation $\mathscr{H}_{\Omega,k} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ du plan qui associe à $M \in \mathscr{P}$ le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
La bijection associée $\mathsf{H}_{\omega,k} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est celle qui envoie $z \in \mathbb{C}$ sur $z' = \mathsf{H}_{\omega,k}(z) \in \mathbb{C}$ tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$, où ω est l'affixe du centre Ω.

1.4.3 Rotations

Si Ω est un point de $\mathscr{P}$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$, la **rotation** $\rho_{\Omega,\vartheta} : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ de centre Ω et d'angle ϑ est la transformation du plan qui à $M \in \mathscr{P}$ associe le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que

$$\Omega M = \Omega M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \vartheta.$$

La bijection associée $\mathsf{R}_{\omega,\vartheta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ envoie $z \in \mathbb{C}$ sur $z' = \mathsf{R}_{\omega,\vartheta}(z) \in \mathbb{C}$ tel que

$$z' - \omega = e(\vartheta)\,(z - \omega)$$

où ω est l'affixe du centre Ω et $e(\vartheta) = \cos(\vartheta) + \mathrm{i}\,\sin(\vartheta)$.
Si $\omega = 0$, on écrit simplement R_ϑ pour $\mathsf{R}_{0,\vartheta}$.

1.4.4 Similitudes

Une **similitude** φ du plan est une transformation qui conserve les rapports des distances, i.e. pour tous points M, N, et P (avec $M \neq N$) d'images respectives M', N' et P' par φ, on a $\dfrac{M'P'}{M'N'} = \dfrac{MP}{MN}$.
Cela signifie que φ multiplie les distances par un certain réel $k > 0$ (appelé **rapport de la similitude**), i.e. si pour tous A et B d'images respectives $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$, on a $A'B' = kAB$.
Si le rapport de la similitude k est égal à 1 (donc $A'B' = AB$), on dit que φ est une **isométrie** [4].

4. D'une manière générale, une isométrie f entre deux espaces métriques (X, d_1) et (Y, d_2) est une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que pour tout $(x, x') \in X \times X$, on a $d_2(f(x), f(x')) = d_1(x, x')$.