

Introduction à la géométrie différentielle

Vincent Guedj


Introduction à la géométrie différentielle

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Crédits iconographiques

Illustration de couverture : © s_maria - Shutterstock.com ; page 6 :
© Francesco Milanese – Shutterstock.com ; page 6 : © VCoscaron –
Shutterstock.com ; page 96 : © Trikona – Shutterstock.com ; page 97 :
© archetype – Shutterstock.com ; page 100 : © Frank Gaertner –
Shutterstock.com ; page 215 : © D. Natalia – Shutterstock.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	 <p>DANGER LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2022

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082984-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Introduction	IX
1 Courbes de \mathbb{R}^n	1
1. Paramétrisation par longueur d'arc	1
1.1. Courbes paramétrées	1
1.2. Paramétrisation par longueur d'arc	4
1.3. Exemples	5
2. Courbes planes	6
2.1. Définitions équivalentes	6
2.2. Courbure	8
2.3. Cercles osculateurs	10
2.4. Étude locale	12
2.5. Rigidité globale	13
3. Courbes gauches	15
3.1. Courbure et torsion	15
3.2. Tangente, plan normal, plan osculateur	19
3.3. Rigidité globale	21
4. Isométries euclidiennes	24
5. Propriétés globales	27
5.1. Courbes fermées	27
5.2. Enroulement des courbes fermées	30
5.3. Inégalité isopérimétrique dans \mathbb{R}^2	33
Exercices	36
2 Surfaces de \mathbb{R}^3	41
1. Espaces tangents	41
1.1. Définitions équivalentes	41
1.2. Surfaces spéciales	47
1.3. Plan tangent	50
2. Première forme fondamentale	54
2.1. Définition	55
2.2. Angles et longueurs	56
2.3. Aires	58

3.	Deuxième forme fondamentale, courbures	60
3.1.	Application de Gauss, orientation	60
3.2.	Deuxième forme fondamentale	65
3.3.	Courbures	67
3.4.	Points spéciaux	71
4.	<i>Theorema Egregium</i> de Gauss	73
4.1.	Symboles de Christoffel	73
4.2.	Le théorème remarquable	75
4.3.	Invariance par isométries globales	78
5.	Surfaces à courbure constante	79
5.1.	Courbure de Gauss constante	79
5.2.	Surfaces minimales	84
6.	Propriétés métriques	88
6.1.	Géodésiques	88
6.2.	Distance intrinsèque	90
7.	Théorème de Gauss-Bonnet	94
7.1.	Surface strictement convexe	94
7.2.	Polyèdres convexes	95
7.3.	Caractéristique d'Euler	98
7.4.	Gauss-Bonnet intrinsèque	100
	Exercices	102
3	Variétés	109
1.	Plongements	109
1.1.	Rappels de calcul différentiel	109
1.2.	Immersion et submersions	112
1.3.	Lemme de Morse	114
1.4.	Partitions de l'unité	116
2.	Sous-variétés de \mathbb{R}^n	118
2.1.	Définition	118
2.2.	Espaces tangents	120
2.3.	Applications différentiables	122
3.	Formes différentielles	125
3.1.	Champs de vecteurs	125
3.2.	Formes multilinéaires alternées	129
3.3.	Formes différentielles	131
3.4.	Différentielle extérieure	134
3.5.	Intégration des formes différentielles	138

4. Variétés abstraites	142
4.1. Variétés topologiques	142
4.2. Variétés différentielles	143
4.3. Espace tangent, différentielle	145
4.4. Formes différentielles et orientabilité	151
5. Variétés complexes et groupes de Lie	154
5.1. Variétés complexes	154
5.2. Groupes de Lie	160
6. Classifications	165
6.1. Structures différentielles	165
6.2. Topologie de basse dimension	165
6.3. Variétés complexes	167
Exercices	169
4 Corrections des exercices	175
1. Courbes	175
2. Surfaces	192
3. Variétés	211
Bibliographie	235
Index	237

Introduction

Ce livre est une invitation à la géométrie différentielle, une discipline mathématique qui se situe au carrefour de nombreux domaines (algèbre, analyse, géométrie, topologie), et qui est devenue un outil de base de la recherche moderne en mathématiques comme dans ses applications.

La théorie des courbes et des surfaces dans l'espace euclidien (bi ou tridimensionnel) a constitué la base du développement de la géométrie différentielle au cours des XVIII^e et XIX^e siècles. Depuis la fin du XIX^e siècle, le domaine s'intéresse plus généralement aux structures géométriques des variétés différentiables. Ces objets sont des ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, on peut donc y définir et étudier les fonctions avec les moyens du calcul différentiel.

La géométrie différentielle est étroitement liée à la topologie différentielle et aux aspects géométriques de la théorie des équations différentielles. Elle a de nombreuses applications en physique, notamment dans la théorie de la relativité générale où elle permet de modéliser la courbure de l'espace-temps. Elle joue, plus récemment, un rôle croissant en imagerie médicale (représentation des formes) et en intelligence artificielle (géométrie de l'information).

Le sujet est donc à la fois classique et avec des développements actuels considérables. Il en résulte un nombre important de concepts souvent difficiles à assimiler au premier abord, et un aspect calculatoire un peu ingrat qui rebute souvent les étudiants qui se doivent pourtant d'appréhender cet outil fondamental.

Le but de ce livre, issu d'un support de cours dispensé par l'auteur en Master 1, est modeste. Pour éviter aux étudiants de se noyer dans un flot de concepts nouveaux difficiles à digérer en 24 heures, il progresse pas à pas, en commençant par traiter en détail le cas des courbes et des surfaces. La notion de variétés abstraites constitue le point d'orgue du livre, ainsi qu'une invitation à poursuivre leur étude (géométrie et topologie) dans un second temps.

Le livre contient plus d'une centaine d'exercices corrigés qui constituent une part intégrante de la compréhension, ainsi que de nombreuses pistes d'approfondissement pour les lecteurs les plus curieux.

Objectifs et prérequis

Ce livre est destiné aux étudiants de Licence (troisième année), de Master (première année), ainsi qu'aux étudiants préparant l'agrégation externe ou interne de mathématiques.

Il couvre tout le programme de géométrie différentielle de l'agrégation et contient une centaine d'exercices corrigés.

La géométrie différentielle utilise des techniques du calcul différentiel, ainsi que du calcul intégral, de l'algèbre linéaire et de l'algèbre multilinéaire, pour étudier des problèmes géométriques d'origines variées. Il présuppose notamment une bonne familiarité avec :

- le calcul différentiel classique (niveau L3) ;
- l'algèbre multilinéaire (niveau L2).

L'objectif du livre est d'étudier quelques notions fondamentales à la base de la géométrie moderne. On introduit certains invariants intrinsèques fondamentaux des courbes et des surfaces (longueur, distance intrinsèque, courbure de Gauss). On y explore la notion de sous-variété différentielle de \mathbb{R}^n et on généralise le calcul différentiel dans ce cadre, en introduisant la notion de forme différentielle et le calcul intégral associé. Ces outils permettent de comparer les objets géométriques selon plusieurs échelles :

- infinitésimale, via l'algèbre (multi)linéaire ;
- locale, via le calcul différentiel ;
- globale, via l'interaction entre géométrie et topologie.

La mise en pratique du calcul différentiel et de l'algèbre multilinéaire de Licence se fait notamment à travers :

- l'utilisation du théorème d'inversion locale pour dégager plusieurs définitions équivalentes des sous-variétés ;
- l'utilisation des formes quadratiques pour comparer la position relative d'une sous-variété avec son espace tangent ;
- le théorème de Stokes qui généralise l'intégration par parties.

Le livre aura rempli son principal objectif s'il permet aux étudiants intéressés par cette thématique de se familiariser avec les concepts de base exposés ici, en leur donnant envie de poursuivre leur découverte avec des ouvrages plus avancés.

Il existe en effet de nombreuses références qui traitent de ce sujet classique. Je me suis librement inspiré des livres indiqués dans la bibliographie, notamment du livre historique [BerGos]. Pour compléter vos lectures, je vous recommande tout particulièrement :

- [DoCarmo] pour approfondir l'étude des courbes et des surfaces ;
- [Lafontaine, Spivak] pour aller un peu plus loin sur les variétés ;
- [Warner] pour la cohomologie et la théorie de Hodge.

Le lecteur est encouragé à faire des dessins le plus souvent possible, et à utiliser également l'un des nombreux sites qui recensent les propriétés remarquables des courbes et des surfaces, tel mathcurve.com.

Le menu

Le livre est divisé en trois chapitres distincts de longueurs inégales. Pour le cours de Master 1 dont il était le support, le rythme du cours était de 2 à 3 séances de 2 heures pour le premier chapitre, 4 à 5 séances pour le deuxième chapitre, et 4 à 5 séances pour le troisième et dernier chapitre.

Le premier chapitre développe l'étude des courbes de l'espace euclidien, avec une attention particulière portée aux courbes planes et gauches. Ce sujet est censé être pour partie connu des étudiants. On y aborde :

- la notion de longueur d'arc, de courbure et de torsion ;
- certaines propriétés des isométries euclidiennes ;
- la classification locale des courbes planes et gauches ;
- quelques propriétés globales des courbes planes.

La géométrie différentielle des surfaces contient un grand nombre des idées et techniques clés du domaine. Il est donc naturel d'y consacrer du temps, avant d'aborder les concepts plus abstraits qui se sont dégagés à la suite de leur étude. Le chapitre 2 introduit notamment :

- les surfaces régulières plongées dans \mathbb{R}^3 ;
- les première et deuxième forme fondamentales ;
- les différentes notions de courbures ;
- le théorème remarquable de Gauss ;
- les géodésiques et la distance intrinsèque ;
- le théorème de Gauss-Bonnet.

Le troisième et dernier chapitre du livre étudie la notion de sous-variété différentielle de l'espace euclidien, ainsi que le concept de variété différentielle abstraite. Si le théorème de plongement de Whitney assure in fine que ces deux notions coïncident, il est essentiel de développer l'étude des variétés abstraites, de même qu'il est nécessaire de traiter la théorie générale des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie, et pas uniquement celle des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Ce chapitre étudie notamment :

- les submersions, immersions, et plongements ;
- les formes différentielles et la différentielle extérieure ;
- les formes volumes et l'orientation des variétés,
- l'intégration des formes différentielles et la formule de Stokes ;
- l'abondance des difféomorphismes sur les variétés abstraites ;
- les variétés complexes et les groupes de Lie.

Il se termine par l'évocation des problèmes de classifications des variétés différentielles compactes de petite dimension, un sujet de recherches actuelles qui a connu des développements spectaculaires ces dernières années.

Chaque chapitre se termine par de nombreux exercices qui sont partie intégrante du cours et qu'il est donc essentiel de faire. Des éléments succincts de correction sont fournis en fin d'ouvrage ; ils sont là pour aider le lecteur, mais ne constituent aucunement un modèle de corrigé.

Remerciements

La plupart des dessins ont été réalisés avec l'aide du logiciel gratuit SAGE. Un grand merci à Christophe Besse d'avoir guidé mes premiers pas dans son utilisation.

Mes collègues Yuxin Ge, Éveline Legendre et les étudiants du Master ESR de Mathématiques de l'Université Paul Sabatier m'ont fait des retours constructifs sur une version préliminaire de ce livre, je les en remercie.

Malgré tout le soin apporté à sa confection, le texte contient probablement de nombreuses coquilles (typos, erreurs, imprécisions). N'hésitez pas à me les signaler en m'écrivant : vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr.

Bonne lecture !

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude des courbes plongées dans \mathbb{R}^n . Nous étudions plus particulièrement les *courbes planes* ($n = 2$) et les *courbes gauches* ($n = 3$).

Nous commençons par observer que toute courbe peut être localement paramétrée par longueur d'arc : toutes les courbes de \mathbb{R}^n sont donc localement isométriques, mais nous allons dégager des propriétés de rigidité globale.

Nous introduisons la courbure des courbes planes. Son importance est illustrée par le « Théorème fondamental » (Théorème 1.2.12) qui affirme que deux courbes planes qui ont même courbure sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de \mathbb{R}^2 . C'est un formidable résultat sur lequel il faut nous arrêter un moment : une information de nature locale (la courbure) suffit à classifier les courbes à équivalence *globale* près.

Pour les courbes gauches, les concepts fondamentaux sont ceux de courbure et de torsion (la nouveauté par rapport aux courbes planes). Ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le *repère de Frenet*, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. L'importance de ces concepts est mise en évidence par le Théorème 1.3.13 : deux courbes gauches ont même courbure (non nulle) et même torsion si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de \mathbb{R}^3 .

Nous rappelons ensuite quelques propriétés des isométries de \mathbb{R}^n , puis nous mentionnons certaines propriétés globales des courbes fermées (nombre d'enroulement, inégalité isopérimétrique).

Je vous incite à consulter le site mathcurve.com sur lequel vous trouverez la représentation graphique de nombreuses courbes que nous rencontrerons dans ce texte (et bien d'autres encore). Vous êtes vivement encouragés à produire le plus de dessins possible au fil de votre lecture.

1 Paramétrisation par longueur d'arc

1.1 Courbes paramétrées

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une application. On peut l'écrire en coordonnées

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

L'application φ sera dite *lisse* lorsque chacune des fonctions coordonnées φ_j est infiniment dérivable.

DÉFINITION 1.1.1

On appelle courbe paramétrée de \mathbb{R}^n la donnée d'une application lisse $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$. On dit qu'un point $\varphi(t_0) \in \Gamma$ est régulier si $\varphi'(t_0) \neq 0$, c'est-à-dire si φ est une immersion au voisinage de t_0 . Un point $\varphi(t_0) \in \Gamma$ tel que $\varphi'(t_0) = 0$ est appelé un point singulier de Γ .
On dit que φ est une paramétrisation régulière si φ est une immersion en tout point et si $\varphi : I \mapsto \varphi(I)$ est un homéomorphisme.

Une paramétrisation régulière s'appelle un *plongement*. Nous rappelons des propriétés des immersions, submersions et plongements au Chapitre 3.

DÉFINITION 1.1.2

On appelle courbe géométrique régulière $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble qui est localement l'image d'une paramétrisation régulière.

Il est important de distinguer les propriétés de la paramétrisation locale des propriétés géométriques de Γ qui sont indépendantes du choix de la paramétrisation. De fait, Γ est définie à un changement admissible local de paramétrisation près :

DÉFINITION 1.1.3

Un changement admissible de paramétrisation de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ est la donnée d'une application lisse $\alpha : J \rightarrow I$ surjective telle que $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$.

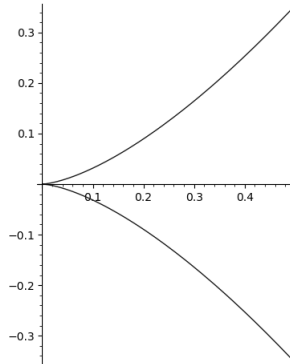
Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que si α' ne s'annule pas sur l'intervalle J , alors soit $\alpha'(t) > 0$ pour tout $t \in J$ et dans ce cas α préserve l'orientation (φ et $\varphi \circ \alpha$ définissent le même sens de parcours de Γ), soit $\alpha'(t) < 0$ pour tout $t \in J$ et dans ce cas $\alpha'(t)$ change l'orientation.

Exemples 1.1.4

1) L'application $\varphi : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique associée la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière.

Observons que $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ est un changement non admissible de paramétrisation (puisque $\alpha'(0) = 0$). Cela signifie que la courbe géométrique Γ_2 donnée par la paramétrisation $t \in \mathbb{R} \rightarrow (t^3, t^6)$ est un objet géométrique différent de Γ , bien que le support de ces deux courbes soit le même.

2) L'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ est une paramétrisation de la courbe Γ d'équation $y^2 = x^3$. Cette courbe présente un point singulier en $(0, 0)$ appelé point de rebroussement de première espèce ou « *cusp* » (en anglais). On dit aussi que Γ est une cubique cuspidale, dont voici une représentation :



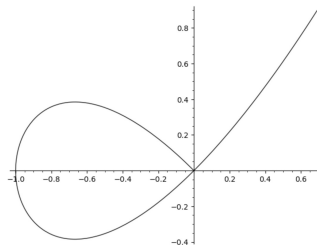
On vérifiera en exercice qu'il n'existe pas de courbe géométrique régulière (i.e. sans point singulier) qui a le même support que Γ .

3) L'application $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ définit une paramétrisation du cercle unité $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ parcouru dans le sens trigonométrique. L'application $\alpha : t \in \mathbb{R} \rightarrow -t \in \mathbb{R}$ est un changement admissible de paramétrisation qui inverse l'orientation : $\varphi \circ \alpha$ parcourt le cercle unité dans le sens des aiguilles d'une montre

4) Vous vérifierez dans l'Exercice 67 que la paramétrisation

$$f : t \in]-1, +\infty[\mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement. Le problème a lieu au voisinage du point $(0, 0) = \varphi(1) = \lim_{t \rightarrow -1} \varphi(t)$.



Tangente. Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ une application lisse et $\Gamma = \varphi(I)$ la courbe géométrique associée. Soit $p = \varphi(t_0) \in \Gamma$ un point régulier de Γ ($\varphi'(t_0) \neq 0$). Lorsque deux paramètres $t \neq t'$ convergent vers t_0 , les droites passant par $\varphi(t), \varphi(t')$ convergent vers une droite limite appelée *tangente* à Γ au point p . On vérifie aisément qu'elle a pour vecteur directeur le vecteur $\varphi'(t_0)$ et pour équation paramétrique

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (t - t_0)\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

1.2 Paramétrisation par longueur d'arc

a) Longueur d'un arc

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée lisse et $A = \varphi(J) \subset \Gamma = \varphi(I)$ un arc fermé de la courbe géométrique Γ (i.e. J est un intervalle fermé).

DÉFINITION 1.1.5

La longueur de l'arc A est

$$\ell(A) := \int_J \|\varphi'(t)\| dt$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .

On vérifie sans peine que la longueur est égale à la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc lorsque le maximum de la longueur de chaque segment de la ligne polygonale tend vers zéro. Ce deuxième point de vue permet de définir la longueur d'arcs non lisses que nous ne considérons pas dans ce cours.

Proposition 1.1.6

La longueur de l'arc A est indépendante de la paramétrisation. Elle est invariante par isométrie.

Démonstration

C'est une conséquence immédiate de la formule de changement de variables. ■

b) Abscisse curviligne

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée *régulière*, de sorte que $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Soit $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ la longueur de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ (c'est-à-dire le supremum des longueurs des arcs fermés de Γ). Alors l'application

$$h : t \in I \mapsto \int_{t_0}^t \|\varphi'(x)\| dx \in [0, L]$$

est lisse et strictement croissante, de dérivée

$$\frac{dh}{dt} = \|\varphi'(t)\| \neq 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

Sa bijection inverse est donc lisse également. La paramétrisation

$$\psi := \varphi \circ h^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation admissible de Γ qui s'appelle *paramétrisation par l'abscisse curviligne* (ou *par longueur d'arc*). Observons que le vecteur $\psi'(t)$ est unitaire quel que soit t :

$$\|\psi'(t)\| = \left\| \varphi'(h^{-1}(t)) \frac{1}{\|\varphi'(h^{-1}(t))\|} \right\| = 1.$$

On dira ainsi également que Γ est paramétrée à vitesse unité.

Cette propriété caractérise la paramétrisation par longueur d'arc :

Proposition 1.1.7

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations d'une courbe géométrique Γ telles que $\varphi'(t), \psi'(x)$ sont des vecteurs unitaires pour tout $t, x \in I, J$. Alors $J = \alpha(I)$ où $\alpha(t) = \pm t + t_0$.

Démonstration

Observons que $\psi = \varphi \circ \alpha$ pour un changement admissible α de paramétrisation. Le caractère unitaire de φ', ψ' assure que $|\alpha'(t)| = 1$ pour tout t . Il s'ensuit par connexité que soit $\alpha' \equiv 1$, soit $\alpha' \equiv -1$, d'où le résultat. ■

1.3 Exemples

Exemple 1.1.8 La paramétrisation

$$\varphi : t \in [0, 2\pi R] \mapsto (R \cos(t/R), R \sin(t/R)) \in \mathbb{R}^2$$

est la paramétrisation par longueur d'arc du cercle centré à l'origine et de rayon R . Comme nous l'indique la proposition précédente, cette paramétrisation est unique une fois que l'on fixe le point $\varphi(0)$ (ici le point $(R, 0)$) et le sens de parcours (ici le sens trigonométrique).

Observons que la paramétrisation de l'Exemple 1.1.8 s'exprime au moyen des fonctions transcendentes \sin, \cos . C'est le cas de la plupart des courbes (excepté les droites, bien entendu).

Exemple 1.1.9 L'hélice circulaire de \mathbb{R}^3 est la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est une courbe tracée sur le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = a^2\}$. Sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par

$$\psi(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

En voici deux représentations :



2 Courbes planes

2.1 Définitions équivalentes

Il existe de nombreux points de vue équivalents pour décrire une courbe géométrique, comme nous l'expliquons ici dans le cas des courbes planes :

Proposition 1.2.1

Les propriétés suivantes sont localement équivalentes :

- i) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est le graphe d'une fonction d'une variable ;
- ii) $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière ;
- iii) il existe un difféomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(\{x = 0\}) = \Gamma$;
- iv) il existe une submersion lisse $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Gamma = F^{-1}(0)$.

Nous renvoyons le lecteur au début du Chapitre 3 pour une description similaire en toute dimension.

Démonstration

Si $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$ est le graphe d'une fonction lisse, alors $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation régulière de Γ , donc (i) implique (ii). Réciproquement, si $\Gamma = \varphi(I)$ admet la paramétrisation régulière $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, on se place au voisinage d'un point tel que $x'(t) \neq 0$ (quitte à interchanger les rôles de x et y). Le théorème d'inversion locale assure que la fonction x est inversible au voisinage de ce point. On peut donc réaliser Γ comme le graphe de la fonction $y \circ x^{-1}$, d'où (ii) \Rightarrow (i).

Soit $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation régulière de Γ . Le vecteur tangent $\varphi'(t)$ est non nul en tout point, on se place au voisinage d'un point tel que $y'(t) \neq 0$ (on peut s'y ramener quitte à composer par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (y, x)$). Alors $\Phi : (s, t) \mapsto (s + x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme (local) tel que $\Phi(\{s = 0\}) = \Gamma$. Ainsi (ii) \Rightarrow (iii).

Réciproquement, si $\Gamma = \Phi(\{s = 0\})$ est l'image de l'axe $\{s = 0\}$ par un difféomorphisme $\Phi(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$, alors Γ admet la paramétrisation régulière $\varphi : t \mapsto (\alpha(0, t), \beta(0, t))$, donc (iii) \Rightarrow (ii).

Considérons l'ensemble des points (x, y) d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 tels que $F(x, y) = 0$, où $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse. On suppose que la différentielle dF ne s'annule pas en un point $(x_0, y_0) \in U$. L'une au moins des deux dérivées partielles ne s'annule pas, disons $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ pour fixer les idées. Par continuité, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ ne s'annule pas pour (x, y) dans un petit voisinage V de (x_0, y_0) . Le théorème des fonctions implicites assure alors l'existence d'un voisinage $V' \subset V$ de (x_0, y_0) tel qu'il existe une fonction lisse f telle que

$$\{(x, y) \in V' / F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V' / y = f(x)\}.$$

Cela montre l'implication (iv) \Rightarrow (i).

Réciproquement, si Γ est le graphe d'une fonction f , alors $\Gamma = F^{-1}(0)$ où $F(x, y) = y - f(x)$ est une submersion, donc (i) \Rightarrow (iv). ■

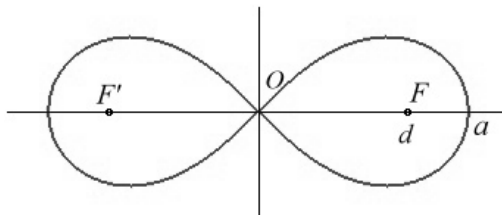
REMARQUE 1.2.2

Ces propriétés ne sont pas globalement équivalentes. Par exemple, le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ peut s'exprimer comme l'image réciproque $F^{-1}(0)$ par la submersion $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$, mais il ne peut pas s'exprimer comme le graphe d'une (seule) fonction.

Exemple 1.2.3 Considérons la lemniscate de Bernoulli¹ dont l'équation cartésienne dans le plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ submersive hors de l'origine. En voici une représentation :



1. Jakob Bernoulli, mathématicien et physicien suisse (1655-1705), frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

On peut également la décrire par la paramétrisation

$$\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \mapsto \varphi(\theta) = d \sqrt{2 \cos(2\theta)} (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}.$$

2.2 Courbure

Soit $s \in I \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. Alors le vecteur vitesse trace une courbe $s \mapsto \varphi'(s)$ sur le cercle unité. Celle-ci possède un vecteur vitesse $\varphi''(s)$ appelé accélération. Au signe près, la courbure est la norme de l'accélération :

DÉFINITION 1.2.4

La courbure de la courbe géométrique $\Gamma = \varphi(I)$ paramétrée par sa longueur d'arc au point $\varphi(s)$ est

$$\kappa(s) := \varepsilon(s) \|\varphi''(s)\|$$

où le signe $\varepsilon(s) \in \{-1, +1\}$ est positif si $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est une base directe de \mathbb{R}^2 , négatif sinon.

Notons que les vecteurs $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ sont orthogonaux (dérivez la relation $\|\varphi'(t)\|^2 = 1$). Une expression utile qui exprime la courbure est donc

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)).$$

La courbure *ne dépend pas d'un choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe.*

Comme l'abscisse curviligne n'est pas souvent calculable, il est utile d'exprimer la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque :

Proposition 1.2.5

Soit $\psi : t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une paramétrisation quelconque d'une courbe géométrique orientée Γ . Alors la courbure $\kappa(t)$ de Γ au point $\psi(t)$ est donnée par

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} = \frac{\det(\psi'(s), \psi''(s))}{\|\psi'(s)\|^3}.$$

La valeur absolue de la courbure est invariante par les isométries de \mathbb{R}^2 .

Démonstration

Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ la paramétrisation par longueur d'arc normalisée de sorte que $\varphi(t) = \psi(s)$. Soit $T(t) := \varphi'(t)$ le vecteur unitaire tangent à la courbe et $N(t)$ le vecteur unitaire normal à $T(t)$, c'est-à-dire que $(T(t), N(t))$ forme une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 .

Comme $\|T(t)\|^2 = 1$, on obtient en dérivant que $2\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$, donc $T'(t)$ est proportionnel à $N(t)$. Le facteur de proportionnalité est précisément la courbure $\kappa(t)$ de la courbe Γ . Autrement dit

$$\varphi''(t) = T'(t) = \kappa(t)N(t).$$

Notons à présent α le changement admissible de paramétrisation tel que $\varphi(t) = \psi \circ \alpha(t)$. Alors

$$\varphi'(t) = \frac{\psi'(s)}{\|\psi'(s)\|} \text{ avec } s = \alpha(t).$$

Dérivons à nouveau cette expression. Il vient

$$\varphi''(t) = \frac{\psi''(s)}{\|\psi'(s)\|^2} + b(s)\psi'(s)$$

pour une fonction $b(s)$ que nous ne cherchons pas à calculer. On en déduit

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)) = \frac{1}{\|\psi'(s)\|^3} \det(\psi'(s), \psi''(s)).$$

La formule annoncée en résulte, en remplaçant ψ' et ψ'' par leurs coordonnées euclidiennes.

Si $F(p) = Ap + v$ et $\tilde{\psi} = F \circ \psi$ est l'image de ψ par une isométrie F , alors $\tilde{\psi}' = A\psi'$ et $\tilde{\psi}'' = A\psi''$. Il vient donc

$$\det(\tilde{\psi}'', \tilde{\psi}') = \det A \cdot \det(\psi'', \psi') = \pm \det(\psi'', \psi')$$

et $\|\tilde{\psi}'\| = \|\psi'\|$ puisque A est une rotation. Il s'ensuit que $|\tilde{\kappa}| = |\kappa|$. ■

Signe de la courbure. Si on change le sens de parcours, la courbure change de signe. Celui-ci dépend aussi de l'orientation du plan. Une isométrie du plan préservant l'orientation préserve la courbure des courbes, tandis qu'une isométrie du plan renversant l'orientation change le signe de la courbure.

Exemples 1.2.6

- 1) La courbure d'un cercle de rayon R est constante. Elle vaut $1/R$ si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, $-1/R$ sinon.
- 2) Au point $(0, 0)$, la courbure de la parabole d'équation $y = x^2$, parcourue dans le sens des x croissants, vaut 2.
- 3) L'ellipse $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$ a pour courbure

$$\kappa(t) = \frac{ab}{[a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t]^{3/2}}.$$

Sous l'angle de la géométrie différentielle, les cercles et les droites ont encore un statut particulier comme le montre le résultat qui suit.

Proposition 1.2.7

Les seules courbes dont la courbure est constante sont les (portions de) droites et les cercles.

Démonstration

Nous montrons plus loin que la courbure caractérise les courbes à isométrie globale près. Comme les cercles et les droites ont une courbure constante (respectivement $\pm 1/R$ ou 0), et comme leurs images par une isométrie globale sont des cercles et des droites, le résultat découle du Théorème 1.2.12.

Il est sans doute préférable ici d'adopter une démarche plus terre à terre. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe géométrique de courbure constante. On peut paramétrer Γ par sa longueur d'arc $s \mapsto \varphi(s)$. Si la courbure est nulle, il vient $\varphi'' \equiv 0$, il s'agit donc d'une (portion de) droite.

Supposons à présent que κ est une constante non nulle. Soit $T(s) = \varphi'(s)$ le vecteur unitaire tangent et $N(s) = T'(s)/\kappa$ le vecteur normal. Observons que

$$N'(s) = -\kappa T(s).$$

En effet, N est unitaire donc N' est orthogonal à N , donc proportionnel à T . La constante de proportionnalité s'obtient en dérivant la relation d'orthogonalité

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, N \rangle = \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle,$$

d'où $\langle T, N' \rangle = -\kappa$.

Soit $M(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa} N(s)$ le « centre de courbure » de Γ au point $\varphi(s)$. Le calcul précédent montre que $M(s) = M_0$ est constant puisque

$$M'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa} N'(s) = 0.$$

Il s'ensuit que Γ est une portion du cercle de centre M_0 et de rayon $1/|\kappa|$. En effet

$$\|M_0 - \varphi(s)\| = \frac{1}{|\kappa|} \|N(s)\| = \frac{1}{|\kappa|}$$

puisque $N(s)$ est unitaire. ■

2.3 Cercles osculateurs

Soit Γ une courbe géométrique et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation. On note $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ les coordonnées euclidiennes.

L'équation d'un cercle $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ dépend de trois paramètres (α, β, R) . On peut fixer la valeur de ces paramètres de sorte que le cercle passe par le point $\varphi(t)$

avec un contact d'ordre 3 au moins. En effectuant un développement de Taylor-Young² au point $\varphi(t)$ tel que $(x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 = R^2$, il vient

$$x(s) - \alpha = (x(t) - \alpha) + x'(t)(s - t) + \frac{x''(t)}{2}(s - t)^2 + o((s - t)^2)$$

et on a un développement similaire pour $y(s) - \beta$.

Le cercle a un contact d'ordre au moins 3 avec Γ au point $\varphi(t)$ si

$$(x(s) - \alpha)^2 + (y(s) - \beta)^2 - R^2 = o((s - t)^2).$$

On en déduit que cette condition est satisfaite exactement lorsque

$$\begin{cases} (x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 - R^2 = 0 \\ (x(t) - \alpha)x'(t) + (y(t) - \beta)y'(t) = 0 \\ (x(t) - \alpha)x''(t) + (y(t) - \beta)y''(t) + x'(t)^2 + y'(t)^2 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer $(x(t) - \alpha)$ et $(y(t) - \beta)$ en fonction de x', y', x'', y'' , à condition que $(x'y'' - x''y')(t) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque la courbure de Γ au point $\varphi(t)$ n'est pas nulle, ce que nous supposons dans la suite. On obtient alors

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \text{ et } y - \beta = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}.$$

En reinjectant dans la première équation, on obtient finalement

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{|\kappa(t)|}.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

Proposition 1.2.8

Si la courbure $\kappa(t) \neq 0$ est non nulle au point $\varphi(t) \in \Gamma$, alors il existe un cercle unique qui a un ordre de contact au moins trois avec Γ au point $\varphi(t)$. Ce cercle « osculateur » a pour rayon l'inverse de la valeur absolue de la courbure.

Lorsque $\kappa(t) = 0$, on dit que la courbe admet un *point d'inflexion*. Dans ce cas, la courbe Γ a un contact d'ordre deux avec sa tangente.

2. Brook Taylor, scientifique anglais (1685-1731); William Henry Young, mathématicien anglais (1863-1942).

2.4 Étude locale

a) Position par rapport à la tangente

On s'intéresse ici à l'allure d'une courbe plane paramétrée Γ , $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ près d'un point régulier $p = \varphi(t_0)$. Un développement limité à l'ordre 2 s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\varphi''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si $\varphi'(t_0)$ et $\varphi''(t_0)$ sont linéairement indépendants (*courbure non nulle*), la courbe est située d'un seul côté de sa tangente, au voisinage de p : elle est contenue dans le demi-plan délimité par la tangente et contenant $\varphi''(t_0)$.

Lorsque $\varphi''(t_0)$ est proportionnel à $\varphi'(t_0)$ (*courbure nulle*), il faut pousser le développement limité plus loin. Supposons que $\varphi^{(j)}(t_0)$ est proportionnel à $\varphi'(t_0)$ pour tout $1 \leq j \leq s - 1$ et $\varphi^{(s)}(t_0)$ ne l'est pas ; on effectue alors un développement limité à l'ordre s ,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + P_s(t)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^s}{s!}\varphi^{(s)}(t_0) + o((t - t_0)^s),$$

où $P_s(t)$ est un polynôme de degré $s - 1$ qui s'annule en t_0 et qui s'exprime simplement en fonction du polynôme de Taylor de $\varphi(t)$ en t_0 . On en déduit l'allure locale de Γ en fonction de la parité de s :

- si s est pair, la courbe est localement d'un seul côté de sa tangente,
- si s est impair, la courbe traverse sa tangente.

Il reste à comprendre le cas où tous les vecteurs dérivés $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont proportionnels à $\varphi'(t_0)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Si l'application φ est développable en série entière au voisinage de t_0 , cela signifie alors que l'application φ s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)h(t)\varphi'(t_0)$$

où h est une fonction réelle analytique. Dans ce cas, Γ est tout bonnement la droite passant par $\varphi(t_0)$ et de vecteur directeur $\varphi'(t_0)$!

Lorsque φ est lisse mais n'est pas développable en série entière, on ne peut pas conclure. Les exemples qui suivent montrent deux graphes qui ont cette propriété. Dans un cas la courbe est d'un côté de sa tangente, dans l'autre elle traverse sa tangente.

Exemple 1.2.9 On considère les fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\exp(-1/x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ces fonctions sont infiniment dérivables sur \mathbb{R} avec toutes leurs dérivées nulles en 0, elles ne sont donc pas développables en série entière en 0.

Nous laissons le lecteur vérifier que le graphe de f se situe au-dessus de sa tangente en 0, tandis que le graphe de g traverse sa tangente en 0 (dans les deux cas, cette tangente est l'axe des x).

b) Points singuliers

Soit Γ une courbe géométrique donnée par une paramétrisation $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous considérons le cas d'un point singulier $a = \varphi(t_0)$, avec $\varphi'(t_0) = 0$.

Si les vecteurs dérivés $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont tous nuls, on ne peut rien dire de plus sauf si φ est développable en série entière, auquel cas φ est une application constante. Supposons donc que $\varphi^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur non nul. Dans ce cas, on appelle *tangente* à la courbe Γ en a la droite de vecteur directeur $\varphi^{(p)}(t_0)$ qui passe par le point $a = \varphi(t_0)$.

Si tous les $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont proportionnels à $\varphi^{(p)}(t_0)$, soit φ est réelle-analytique et alors Γ est la droite passant par $\varphi(t_0)$ et de vecteur directeur $\varphi^{(p)}(t_0)$, soit on ne peut rien dire de plus, comme on s'en rend compte en modifiant très légèrement l'Exemple 1.2.9.

Supposons à présent qu'il existe $j > p$ tel que les vecteurs $\varphi^{(p)}(t_0)$ et $\varphi^{(j)}(t_0)$ sont linéairement indépendants. On note q le plus petit de ces entiers j . Le comportement local de la courbe Γ dépend alors de la parité de p et q :

DÉFINITION 1.2.10

Si p est impair et q pair : on parle de *point de concavité*, la courbe est du côté de la tangente qui contient $\varphi^{(q)}(t_0)$.

Si p est impair et q impair : on parle de *point d'inflexion*, la courbe traverse sa tangente.

Si p est pair et q impair : on parle de *point de rebroussement de première espèce*, la courbe traverse sa tangente.

Si p et q sont pairs : on parle de *point de rebroussement de seconde espèce*, la courbe est d'un côté de sa tangente.

Exemple 1.2.11 Vous pouvez fabriquer des exemples de chacune de ces situations en paramétrant la courbe géométrique définie par $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^a = y^b\}$ et en jouant sur la valeur des paramètres $a, b \in \mathbb{N}$.

2.5 Rigidité globale

Nous avons déjà mentionné que les isométries directes du plan préservent la courbure. Voici une réciproque importante à cette observation :

Théorème 1.2.12

Soit Γ_1 et Γ_2 deux courbes géométriques régulières dans \mathbb{R}^2 qui ont la même courbure. Alors il existe une isométrie directe du plan qui transforme Γ_1 en Γ_2 .