HISTOIRES DE PROBLÈMES HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

I.R.E.M.

ellipses

1. En route vers l'infini

Michel GUILLEMOT
I.R.E.M. de Toulouse

"Tout cela fait voir que l'esprit humain se propose des questions si étranges surtout lorsque l'infini y entre, qu'on ne doit pas s'étonner s'il y a de la peine à en venir à bout"
LEIBNIZ, Nouveaux Essais IV, 3.

La route vers l'infini est sans fin : pour l'emprunter des choix sont nécessaires. Nous pourrions démarrer au XIX^{e} siècle, époque où l'infini mathématique a vraiment acquis droit de cité. Nous pourrions aussi cheminer à travers les diverses disciplines et examiner comment, peu à peu, l'infini y a pénétré. Nous avons choisi une autre voie négligeant au passage certains monuments exceptionnels tels par exemple, la géométrie (cf. chapitre 9) ou le calcul infinitésimal (cf. chapitre 3 ou 5). Nous avons voulu privilégier l'infini numérique et essayer de montrer comment au cours du temps les hommes et les femmes ont pu répondre aux deux questions fondamentales de la cardinalité et de l'ordinalité :

- comment compter ?
- comment ordonner ?

Mais là encore nous avons laissé aux bords de nos sentiers des civilisations prestigieuses comme, par exemple, la civilisation arabo-musulmane ou la civilisation chinoise. En d'autres termes, nous sommes partis comme pour la route des vacances, délaissant au passage certaines autoroutes et sites pourtant réputés pour privilégier un aspect plus particulier de notre promenade.

Du peu au beaucoup en passant par l'infini, dénombrable ou continu, nous aborderons ainsi jusqu'aux rivages du transfini.

Départ pour les îles : le peu suffit

Passant au loin des magnifiques plages de Tahiti ou de ... l'atoll de Mururoa, nous voguons vers les îles Murray, entre la Nouvelle Guinée et la péninsule australienne du Cap York. Là

> *"si on en croit Hunt, certains indigènes ne connaissaient que les noms de nombres suivants , netat pour "un ", neis pour "deux" neis-netat pour "trois" (2 + 1) et neis-neis pour "quatre" (2 + 2) ; au delà ils employaient quelque chose comme une "multitude"* [1]

Croyons-nous être bien partis pour notre long voyage ? Ne sommes nous pas vite arrêtés?

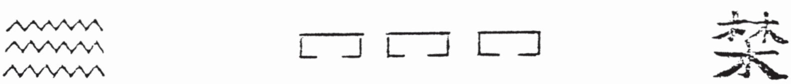
> *"le peu de mots exprimant des nombres dans les langues aborigènes ou insulaires, le fait qu'ils dépassent rarement 6, ne signifie aucunement que ces peuples ne savent pas compter. Encore moins qu'ils sont au stade préhistorique de leur civilisation"* [2]

---

1 IFRAH, *Histoire universelle des chiffres*, p. 13
2 ROUX, *L'Homme et son nombre*, p. 16

Certaines études ont pu montrer que ces indigènes sont des descendants de peuples qui à d'autres époques ont eu un langage plus évolué ou une meilleure connaissance des nombres. Il est très difficile d'effectuer un retour vers le passé dont ne nous saisissons que quelques témoignages à travers notre vision d'hommes du XX^{e} siècle. Contentons nous simplement de nous émerveiller devant le fait qu'il y a plusieurs millénaires, des femmes et des hommes, qualifiés parfois trop abusivement de "primitifs", ont pu réaliser la première abstraction de l'histoire mathématique : celle du nombre 2. Peu importe que certains se soient arrêtés à 2, d'autres à 4 et enfin d'autres à 6. Avaient-ils besoin d'aller au-delà ? Le peu ne leur suffisait-il pas ? Nous mêmes, aujourd'hui, n'éprouvons-nous pas souvent le besoin de changer d'unité de mesure pour que les nombres aient un certain sens ? Une déclaration de revenus de 550 000 000 de dollars représente, peut-être, une énorme richesse mais le fait que le directeur de Disneyworld gagne autant que les 4 000 jardiniers qu'il emploie[3] est sans doute plus significatif. Mais avant d'en venir à de si fortes sommes, la guerre de trois n'a-t-elle pas eu lieu ?

Les écritures égyptienne (hiéroglyphique) et chinoise ont conservé les premiers balbutiements du trois comme indiquant la multitude, le pluriel. Ainsi



eau des maisons forêt = 3 arbres

fig. 1

"L'étape du trois paraît être décisive car elle introduit la progression infinie dans la suite des nombres " [4]

Même si nous ne pouvons pas l'affirmer avec certitude il semble que le langage conserve les traces de la bataille visant à franchir la vieille barrière du deux. Trois est ainsi souvent associé à beaucoup, par exemple en latin *tres* et *trans*, en français *trois* et *très* et en anglais *three* et *through*. Après un et deux, sont formés les ordinaux troisième, quatrième et cinquième, ... Auparavant, premier garde sa signification, qui est avant tous les autres, tandis que l'on peut trouver second pour "l'autre" ou "celui qui suit" comme en latin "secundus". Difficile de trancher entre second et deuxième. Essayons d'aller plus loin, quittons le peu pour le beaucoup.

Au pied des pyramides les scribes comptent beaucoup

L'origine de l'écriture hiéroglyphique des nombres nous est inconnue. Elle est présente sur les premiers documents qui nous sont parvenus et elle ne changera pas durant les trois millénaires qu'a duré la civilisation de l'Ancienne Egypte. Notons au passage qu'il n'en a pas été de même des écritures cursives égyptiennes, hiératique ou démotique. Quant au système numérique employé il est semblable à celui utilisé par la plupart des peuples lorsqu'ils ont voulu mieux appréhender le beaucoup: c'est un système additif de base dix. Mais guidés par leur souci de pureté et leur goût artistique, les anciens Egyptiens ont employé des figures différentes pour noter seulement les différents multiples de 10.

3 ALBERT, *Capitalisme contre capitalisme*, p. 96

4 MENNINGER, *Number Words and Number Symbols*, p. 17

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
						
barre	anse ?	corde enroulée	fleur de lotus	doigt coupé	têtard	dieu assis

fig. 2

Le dernier signe représente un dieu assis levant les bras au ciel devant la voûte étoilée : un million représente un nombre astronomique. Point d'autre signe ou de procédé soustractif comme par exemple chez les Romains. La notation garde peut être les traces de la "guerre de trois" puisque les signes sont souvent groupé par trois. Ainsi 5 et 9 étaient souvent notés comme suit :

|||
||

Mais le goût artistique prime avant tout et les fleurs de lotus, par exemple, peuvent être regroupées pour former un magnifique bouquet. D'autre part des groupements par quatre ne sont pas exclus ; ainsi 4 et 8 sont souvent représentés hiéroglyphiquement sous la forme suivante :

||||

||||
||||

Dans les horloges anciennes, les chiffres romains pour 4 et 9 sont respectivement souvent écrits IIII et IX. Quoiqu'il en soit un scribe égyptien aurait pu écrire 1992 comme suit

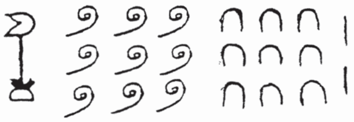


fig. 3

Exercice 1 : Quel est le nombre de chèvres ?

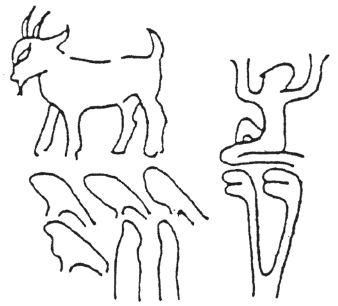


fig. 4

La pureté hiéroglyphique ne se retrouve ni dans le langage ni dans la construction des nombres ordinaux :

> *"le nombre 2 est, naturellement un duel. Les unités, à partir de 3, devraient avoir toutes, à l'origine, une désinence masculine, qui est tombée dans la plupart d'entre elles ; primitivement des pluriels, elles ont été ensuite traitées comme des singuliers"*[5]

De même, pour les ordinaux, nous retrouvons des traces de divers usages :
- deux écritures pour second ou deuxième
- un mode pour écrire les nombres à partir du troisième jusqu'au dixième et ensuite un autre mode. Pour ce dernier, les nombres ordinaux sont formés par l'adjonction du participe "qui complète" représenté par un fouet. Doit-on comprendre que l'on complète, que l'on range....au fouet ? Ou bien le scribe se souvient-il de ses dures conditions d'apprentissage ?

> *" Tu frappais sur mon dos, et ton enseignement est entré dans mon oreille"* [6]

En dehors des nombres entiers, les anciens Egyptiens utilisaient d'autres nombres rationnels. Ainsi ils avaient des signes particuliers pour désigner 2/3 et 1/2 et pour les inverses des autres entiers ils se servaient du signe de la bouche, survivance, sans doute, des partages alimentaires.

fig. 5

Mais ils n'avaient pas d'autres notations et toute "fraction" était ainsi représentée sous la forme d'une somme finie de nombres entiers ou fractionnaires distincts. Ainsi ils pouvaient écrire 2/7 comme suit :

fig. 6

qui correspond à notre relation

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}.$$

5 LEFEVRE, *Grammaire de l'Egyptien classique*, p. 107

6 HERMAN, *La civilisation égyptienne*, p. 421

Exercice 2 : Dans le papyrus Rhind, on trouve des décompositions de nombres de la "forme 2/n" en somme d'inverses d'entiers tous distincts et inférieurs à 1 000. Ecrire ainsi 2/71.

Pour la conduite de leurs multiplications au moyen du doublement (cf. chapitre 15), cette représentation ne devait pas être quelconque ; d'une part, elle devait éviter l'introduction de trop grands nombres et d'autre part il ne fallait pas tourner en rond. Ainsi si l'on écrivait :

(1) $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$

par doublement on obtenait

$$\begin{aligned}\frac{4}{n} &= \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n} \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}\right) + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}\right) + \frac{1}{3n} \quad \text{(d'après (1) et "règle } \tfrac{2}{3n} \text{")} \\ &= \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{2}{3n} + \frac{1}{3n} \quad \text{(en regroupant)}\end{aligned}$$

Nous n'avons pas progressé! Les anciens Egyptiens ont ainsi dû déployer des trésors d'ingéniosité pour mener à bien leurs très nombreux calculs. Il n'en demeure pas moins que ces décompositions finies ne pouvaient que renforcer leur goût de l'exactitude et de la finitude. D'autres notations numériques ne permettent-elles pas de s'évader vers l'infini ?

Entre les deux fleuves : les Babyloniens prennent position

L'histoire commence à Sumer : tel est le titre d'un excellent ouvrage de Samuel Kramer. Ne pouvons nous pas affirmer que l'histoire de l'écriture des nombres commence entre le Tigre et l'Euphrate, à Sumer ? Peu à peu, nous connaissons mieux le long cheminement qui a conduit, au IV^{e} millénaire avant Jésus-Christ, les scribes proto-sumériens à adopter un système hybride, fruit d'une pratique de diverses unités de mesure et par suite de différents multiples de 2, 3, 6 ou 10. Point donc cette fois de souci de pureté arithmétique, le système est à la fois additif et multiplicatif, ou de souci d'esthétique, les signes sont directement liés aux stylets ou calames qui servaient à les graver dans l'argile. L'extrémité arrondie du calame, tige de roseau ou baguette d'os ou d'ivoire servait à "imprimer" les chiffres dans l'argile. Petit et enfoncé obliquement sa marque désigne l'unité. Petit et enfoncé perpendiculairement à la surface de la tablette, sa trace est un cercle : elle note une dizaine. Plus gros on obtient la soixantaine. Vient ensuite 600 en utilisant un principe multiplicatif et des calames de grosseurs différentes.

1	10	60	600	3 600	36 000
					
petit calame "oblique"	petit calame "perpendicu-laire"	gros calame "oblique"	gros calame "oblique" petit calame "perpendicu-laire"	gros calame "perpendicu-laire"	gros calame "perpendicu-laire" petit calame "oblique"

fig. 7

Exercice 3 : Vérifier que le total du nombre de sacs exprimés au revers de cette tablette est bien exact.

Face Revers

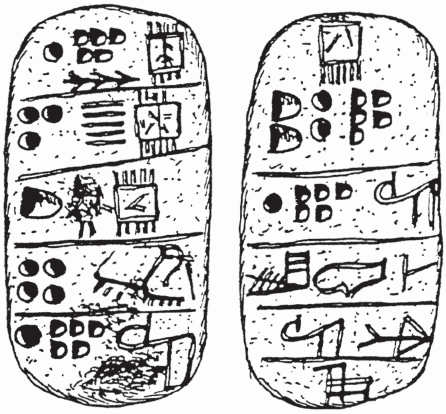


fig. 8

Même si les scribes sumériens n'ont pas poursuivi très loin les écritures des nombres il n'en demeure pas moins qu'en utilisant des calames de différentes grosseurs ils auraient pu représenter ainsi n'importe quel nombre, l'abstraction additive et multiplicative pouvant se poursuivre indéfiniment. Ne procédons nous pas de manière analogue lorsque nous représentons par des signes de différentes "grosseurs" des populations statistiques diverses ?

Exercice 4 : Indiquer comment les scribes sumériens auraient pu noter des nombres plus grands.

Le développement de l'écriture a progressivement imposé l'utilisation d'un calame entaillé donnant lieu à une écriture cunéiforme. Pour éviter toute ambiguïté le principe multiplicatif a été abandonné et seul a subsisté l'utilisation de calames de différentes grosseurs.

1	10	60	600	3 600	36 000
					
petit clou "vertical"	petit clou "oblique"	grand clou "vertical"	grand clou "oblique"	très grand clou "vertical"	très grand clou "oblique"

fig. 9

Exercice 5 : Quels sont les nombres figurant sur cette tablette ?

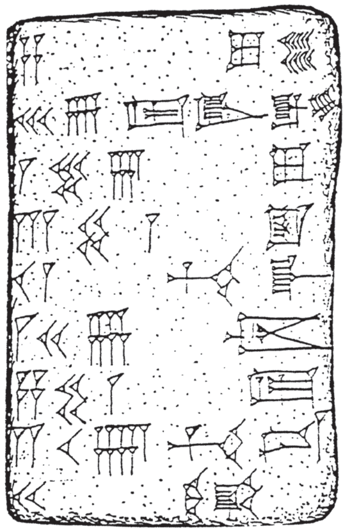


fig. 10

Pourquoi ne pas se passer alors de l'utilisation de différents calames ? Est-ce là la raison qui a poussé les Babyloniens à introduire la plus grande invention mathématique : celle d'un système numérique de position ? Le clou "vertical" ne désigne plus alors l'unité mais une puissance quelconque positive ou négative de 60 et le clou "oblique", dix fois une puissance de soixante. Ainsi 1992 s'écrit :

dans le système additif

fig. 11

et dans le système positionnel

pour 3 x 60 x 10 + 3 x 60 + 1 x 10 + 2 x 1

En fait pour les Babyloniens, cette dernière représentation pouvait aussi bien signifier 1992 que
$30 \times 60^3 + 3 \times 60^2 + 10 \times 60 + 2 \times 60$

ou, en l'absence du zéro ,
$30 \times 60^4 + 3 \times 60^3 + 10 \times 60 + 2 \times 60^{-1}$

ou encore de manière générale
$30 \times 60^p + 3 \times 60^q + 10 \times 60^r + 2 \times 60^s$
où p, q, r et s, sont des entiers positifs négatifs ou nuls écrits dans l'ordre décroissant.

Les Grecs et les Arabes ne se sont pas trompés sur la vertu d'un tel système. A côté de leurs propres systèmes additifs de numération, ils ont utilisé la position et la base soixante babylonienne. Ainsi Théon d'Alexandrie qui vécut vers 370 après Jésus Christ donne 67° 4' 55" pour valeur approchée de $\sqrt{4500}$. Aujourd'hui les divisions sexagésimales de nos heures et minutes sont le souvenir de cette prodigieuse invention des peuples entre les deux fleuves : nous pouvons noter à l'infini. Mais noter quoi ?

Certes tout entier peut ainsi être noté. Qu'en est-il des rationnels de la vie quotidienne ? Si 2/7 avait une écriture hiéroglyphique finie il n'en est plus de même pour l'écriture babylonienne : 7 est un nombre premier qui ne divise pas 60 et 2/7 peut être seulement approximé sexagésimalement comme il l'est aussi décimalement.

Exercice 6 : a) Donner un développement sexagésimal de 2/7 à l'ordre 3.
b) Donner la période du développement sexagésimal de 2/7.
c) Donner la période du développement décimal de 2/7.

Lorsque nous lisons, sur une calculatrice, le résultat de la division de 2 par 7 sous la forme 0,285 714 286 nous ne pouvons prendre clairement conscience ni de l'infinité du développement décimal de 2/7 ni de sa périodicité: nous ne sommes pas trop éloignés de nos lointains ancêtres babyloniens. Certes les Babyloniens ont été parfois amenés à mieux préciser leurs constantes (cf. chapitre 2) Mais ils ne nous ont pas laissé de documents montrant l'utilisation d'un algorithme conduisant à une approximation toujours meilleure. Les décompositions égyptiennes ou les développements sexagésimaux babyloniens ont des particularités communes : ils sont finis et ils répondent aux besoins des calculateurs. Le temps des "théoriciens" peut arriver. Nous allons quitter le domaine strictement numérique ainsi constitué pour nous interroger sur les propriétés des éléments de ce domaine. Dépassant son caractère cardinal ou ordinal, le nombre ne peut-il pas nous aider à mieux comprendre tout ce qui nous entoure ?

Croisière en Méditerranée : les Pythagoriciens se figurent que tout est nombre

Naviguant sur les eaux de la Méditerranée nous suivons peut être les routes que, selon la légende, Pythagore aurait parcourues. Se nourissant aux sources égyptiennes et babyloniennes il aurait emprunté aux premières une certaine mystique numérique et aux secondes leurs connaissances astronomiques.

> *"Ordre et désordre, cette bipolarité se retrouve dans la science savante du ciel comme dans les savoirs populaires. Si Aristote dont la pensée régna sur la science occidentale durant deux mille ans, ne traite pas des comètes dans son* ***Traité du ciel*** *mais dans ses* ***Météorologiques****, c'est parce que les comètes par le désordre qu'elles introduisent ne peuvent appartenir qu'aux basses couches de l'atmosphère, à peine au-dessus de celles où se forment les orages et où naissent les vents, certainement pas aux sphères supérieures où les astres se meuvent selon des lois immuables"* [7]

Bien avant Aristote, les Pythagoriciens ont fondé ces lois immuables sur le nombre : le *"tout est nombre"* de leur philosophie permet d'associer représentation, harmonie et lois dans un même élan. Comme ordre et désordre semblent s'opposer dans le ciel, le nombre, entier, nécessairement fini, ne peut-il pas servir à mieux comprendre l'infini ?

A tout entier naturel non nul, les Pythagoriciens ont associé une figure visible qui n'est pas un signe conventionnel comme le serait un chiffre : 2 est hétéroméque, de la forme n (n+1), 3 est triangulaire, 4 est carré et n est n-gonal. Pour être valable, la forme de la figure doit pouvoir se perpétuer en une forme semblable engendrant ainsi une suite infinie, par l'adjonction d'un même forme, appelée le gnomon, souvenir de l'instrument d'observation astronomique. Ainsi on aura, par exemple :

-les nombres carrés dont le gnomon se présente sous sa forme astronomique : le bâton fiché en terre et son ombre portée ont la forme d'une équerre.

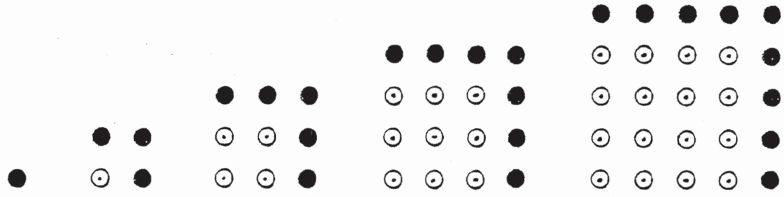


fig. 12

7 VERDET, *Le ciel, ordre et désordre*, pp. 15-17