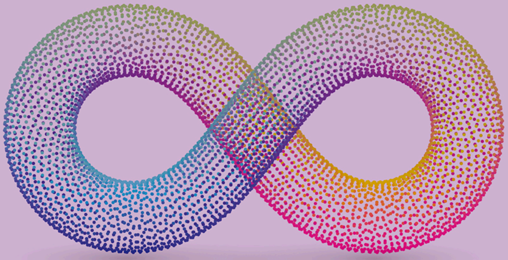
IREM - Histoire des Mathématiques

Histoires de calcul infinitésimal

De l'étude des courbes aux dérivées et aux intégrales

sous la direction de
Guillaume Moussard



ellipses

Chapitre I

Méthodes infinitésimales à l’aube du calcul différentiel

Avant l’invention du calcul différentiel et particulièrement au XVII^e^ siècle, les mathématiciens, essentiellement européens, développent de nouvelles méthodes afin de résoudre des problèmes de détermination d’aires et de volumes, ou encore d’extremum et de tangentes. Ils vont se confronter à l’infini, introduire l’algèbre dans la géométrie et inventer de nouvelles méthodes ainsi que de nouvelles branches des mathématiques.

L’étude de ces méthodes « pré-différentielles » est intéressante car elle donne du sens à nos techniques actuelles dans l’enseignement du calcul différentiel. C’est d’ailleurs l’esprit des nouveaux programmes qui promeuvent aujourd’hui les références à l’histoire des concepts mathématiques et à leur longue maturation au cours des siècles.

Ce chapitre présente en un premier temps un certain nombre de méthodes permettant d’évaluer des aires et des volumes avant l’invention du calcul intégral, et principalement la méthode des indivisibles. Puis nous exposons trois méthodes de détermination des tangentes à une courbe, celles de Descartes, de Roberval et de Fermat. Nous verrons en particulier que plusieurs de ces méthodes mobilisent la notion d’infini dans les raisonnements géométriques.

Déterminer des aires et des volumes

On peut évaluer les grandeurs géométriques essentiellement de deux façons. La première consiste à comparer ou additionner des grandeurs homogènes comme des longueurs, des aires ou des volumes, par superposition, découpage et recollement, ce qui permet de prendre pleinement conscience des propriétés caractéristiques de chaque grandeur. La seconde consiste à déterminer numériquement une grandeur, le plus souvent à l’aide d’une formule, lorsqu’une unité est fixée. Ce sont ces méthodes de calcul d’aires et de volumes, davantage rapide et efficace, que l’enseignement actuel privilégie, alors que dans l’histoire, la comparaison des grandeurs a précédé celle de mesure. Or, nous savons que le fait de calculer une grandeur à l'aide d'une formule n'est pas suffisant pour s'approprier et se représenter correctement une grandeur. Un risque connu des enseignants est la confusion entre les notions d'aire et de périmètre. De plus, la continuité des grandeurs géométriques est une notion intuitive alors que le nombre, de par son écriture décimale, peut engendrer une image discontinue de la mesure des grandeurs.

Le terme de « quadrature » désigne jusqu'au XVII^e^ siècle la détermination d'une surface inconnue en la comparant, par des raisonnements géométriques sur les figures, à une autre surface davantage connue, en général à un carré. De même, la cubature consiste à comparer le volume d'un solide inconnu à celui d'un solide usuel, souvent le cube.

Enfin, le XVII^e^ siècle aborde l'infini d'une façon nouvelle et ce concept est un défi redoutable pour le professeur de mathématiques. C'est pourquoi les méthodes développées au XVII^e^ peuvent l'intéresser.

LE DOUBLE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Pour les Grecs anciens, les grandeurs infinies n'ont pas de réalité physique car l'infini en acte rejeté par Aristote ne peut se réaliser. Ils ne procèdent pas à un passage à la limite moderne mais utilisent un double raisonnement par l'absurde attribué à Eudoxe (IV^e^ siècle av. J.C.), ce qui leur permet de raisonner sur des grandeurs finies aussi petites qu'ils le désirent. C'est ainsi que plusieurs des quadratures et cubatures établies dans l'Antiquité reposent sur ce double raisonnement par l'absurde. Encore utilisé au XVII^e^ siècle, il intervient dans la démonstration de bon nombre de résultats : la cubature de la pyramide par Euclide, la quadrature du cercle par Archimède, ou l'aire d'un « segment » de parabole, c'est-à-dire d'une portion de celle-ci, par Archimède également. Il ne s'agit pas ici de mesurer mais de comparer. Par exemple, concernant la parabole, l'aire d'un segment de parabole $\widehat{AB\Gamma}$ est égale à quatre tiers du triangle inscrit $AB\Gamma$ (fig. 1).

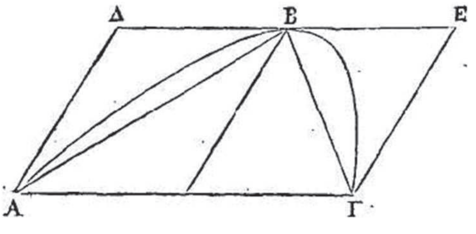


Fig. 1 : L'aire du segment de parabole par Archimède

Afin d'illustrer ce raisonnement, nous avons choisi de présenter la proposition 5 du livre 12 des *Éléments* d'Euclide traduits par Denis Henrion, professeur de mathématiques au début du XVII^e^ siècle à Paris : « les pyramides de même hauteur ayant bases triangulaires, sont l'une à l'autre comme leurs bases » [3, p. 547] ce qui signifie que les volumes de ces deux pyramides sont dans le même rapport que les aires de leurs bases. Cette démonstration est un exemple de travail sur les grandeurs par découpage et sans mesure.

Nous illustrons la démarche euclidienne dans le cas de deux pyramides P et Q dont les bases triangulaires ont la même aire (fig. 2), P et Q pouvant désigner aussi bien l'objet géométrique ou son volume. Euclide construit les milieux des arêtes puis divise chaque pyramide en deux pyramides (en gris) et deux prismes, qu'on qualifiera l'un de « debout » et l'autre de « couché ».

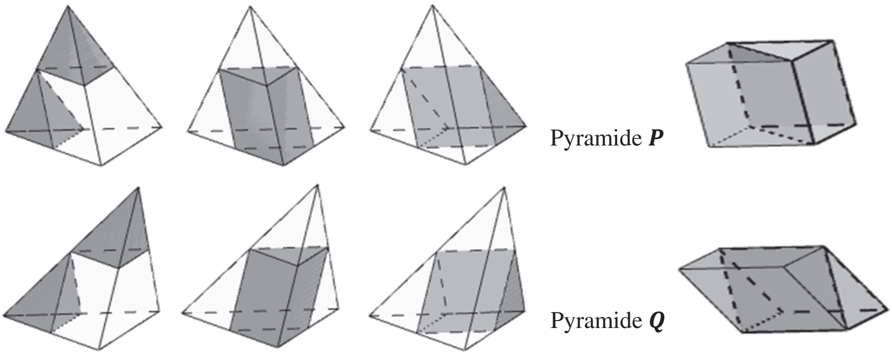


Fig. 2 : Décomposition de la pyramide

Pour chacune des pyramides initiales, les deux petites pyramides en gris sont constituées des mêmes triangles et sont donc identiques deux à deux : le lecteur peut les voir comme une réduction de moitié de la pyramide initiale. Pour les deux pyramides, les prismes « couchés », et les prismes « debout » ont le même volume puisqu'ils sont tous les quatre égaux à la moitié de parallélépipèdes qui ont pour base la moitié de la base de la pyramide initiale et ont même hauteur. Nous présenterons plus loin la démonstration de cette propriété d'égalité des parallélépipèdes dans la partie consacrée à Cavalieri.

De plus, chaque prisme de la pyramide P a la même hauteur et la base de même aire que chaque prisme de la pyramide Q, ils ont donc même volume.

Par ailleurs, le volume d'une pyramide grise est plus petit que le volume d'un seul prisme, cela se voit bien en glissant la pyramide grise à l'intérieur du prisme. Par conséquent, le volume des deux pyramides grises prises ensemble est plus petit que les deux prismes et ainsi plus petit que la moitié du volume de la grande pyramide.

Afin de comparer les deux pyramides initiales, nous pouvons ôter les prismes qui sont deux à deux égaux. Il nous suffit ainsi de comparer les quatre pyramides de la figure. On réitère le procédé en effectuant le même découpage que précédemment mais avec les pyramides restantes (fig. 3).

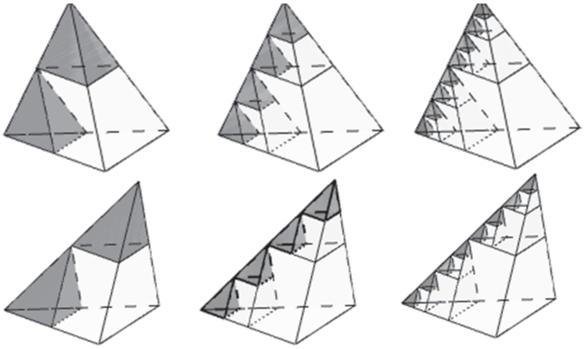


Fig. 3 : Découpage de la pyramide

Le double raisonnement par l'absurde utilise alors la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide, appelée aujourd'hui axiome d'Archimède : « Étant proposées deux grandeurs inégales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, et du reste encore plus de la moitié et qu'en continuant cela se fasse toujours ainsi : il demeurera en fin une grandeur plus petite que la moindre des deux proposées » [3, p. 404]. Euclide suppose que le volume de la première pyramide P est différent de la seconde Q, par exemple que P est plus petit que Q, et prouve que cela mène à une contradiction. Divisons Q en deux pyramides semblables à Q et en deux prismes égaux dont la réunion est plus grande en volume que la moitié de Q. On peut continuer à diviser de la même manière les pyramides engendrées par cette division et ainsi de suite. À la première partition de Q en deux pyramides et deux prismes, on enlève à Q deux prismes dont le volume dépasse la moitié du volume de Q. À la seconde partition, idem. À partir d'un certain nombre de divisions de Q, on obtient : Q – somme des prismes de $Q < Q - P$ c'est-à-dire que la somme des prismes de $Q > P$.

Divisons de la même manière la pyramide P en autant de pyramides et de prismes que la pyramide Q. On a vu que chaque prisme de la pyramide P a le même volume que chaque prisme de Q. Ainsi, la somme des prismes de P a le même volume que la somme des prismes de Q. Or, le volume de P est supérieur à la somme des prismes de P. Donc $P >$ somme des prismes de Q : absurde ! En supposant $P > Q$, Euclide démontre également que cela est absurde, d'où l'égalité des deux pyramides initiales.

En utilisant l'axiome d'Archimède et un double raisonnement par l'absurde, Euclide parvient à éviter le recours à l'infini : le processus s'arrête chez les Grecs dans cette démonstration après un nombre fini d'étapes. Nous allons voir qu'il continue à l'infini avec Grégoire de Saint Vincent, un mathématicien jésuite flamand.

GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT ET LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

Dans l'*Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* [10], un ouvrage de 1226 pages réparti en dix livres écrits à partir de 1625 et publiés en 1647, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) utilise cette technique d'épuisement qu'est le double raisonnement par l'absurde hérité des Grecs et le nomme « méthode d'exhaustion », c'est-à-dire par épuisement à l'infini. Dans sa proposition 116 du Livre 2, il introduit une nouveauté en effectuant un passage à l'infini et transforme la proposition 1 du Livre X d'Euclide citée plus haut (fig. 4).

> *Soient deux quantités AB et CD. Soit AB divisée en E, G de sorte que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, EG pas inférieure à la moitié de EB ; qu'on divise de même manière CD en F et H et soient AE et CF égales. EG et FH égales ; que cela puisse se faire toujours. Je dis que la toute AB est égale à la toute CD.* [17]

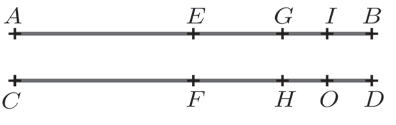


Fig. 4 : La proposition 116 du Livre 2

De Saint Vincent démontre cette proposition à l'aide d'un double raisonnement par l'absurde, ce qui lui permet de l'appliquer par la suite sans recourir à nouveau à ce double raisonnement, c'est là une innovation majeure par rapport aux Grecs qui l'utilisent explicitement à chaque fois.

De Saint Vincent utilise cette proposition afin de réaliser la quadrature de l'hyperbole dans le livre 6. Soient A et B deux points de l'hyperbole (fig. 5) et I le milieu du segment $[AB]$. Le segment $[OI]$ coupe l'hyperbole en J. Une propriété remarquable de l'hyperbole est le fait que la parallèle (CD) à (AB) passant par J est tangente en ce point à la courbe (proposition 16). Il en déduit que le triangle ABJ est le triangle d'aire maximale de base AB inscrit dans la surface $S(AB)$ délimitée par le segment $[AB]$ et l'arc $\widehat{AB}$ d'hyperbole : en choisissant en effet un autre triangle ABJ', la convexité de la courbe implique que sa hauteur est nécessairement inférieure à celle de ABJ (proposition 102). Puis il affirme que le triangle ABJ a une aire supérieure à la moitié de $S(AB)$. En effet, $ABCD$ étant un parallélogramme, $ABJ = \frac{1}{2}ABCD$. Or, $ABCD > S(AB)$ donc $ABJ > \frac{1}{2}S(AB)$.

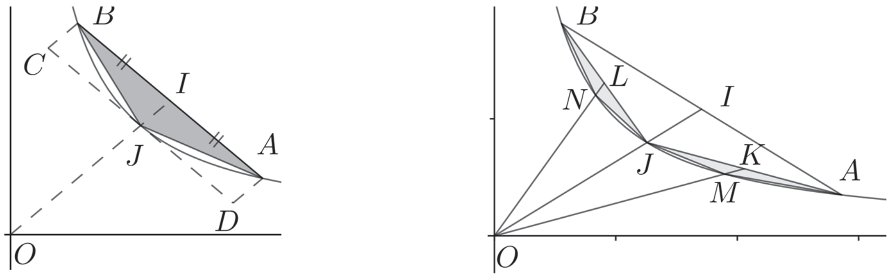


Fig. 5 : Les propositions 102 et 104 du Livre 6

Puis, dans la proposition 104, il réitère le procédé (fig. 5) mais dans les surfaces $S(AJ)$ et $S(BJ)$ délimitées par les segments $[AJ]$ et $[BJ]$ avec les arcs d’hyperbole $\widehat{AJ}$ et $\widehat{BJ}$. Il construit les milieux respectifs K et L de $[AJ]$ et $[BJ]$, puis les points M et N intersections respectives de (OK) et (OL) avec l’hyperbole. Il démontre que les triangles maximaux en gris AJM et BJN sont égaux.

De Saint Vincent fait alors intervenir sa méthode d’exhaustion avec sa proposition 116 afin de démontrer l’égalité des aires $S(AJ)$ et $S(BJ)$. Les triangles maximaux en gris AJM et BJN sont égaux et dépassent de plus de moitié les aires $S(AJ)$ et $S(BJ)$ dans lesquelles ils sont inscrits. On peut réitérer en construisant les triangles maximaux dans les surfaces restantes de part et d’autre de J : les triangles maximaux de $S(AM)$ et $S(MJ)$ seront égaux à ceux de $S(JN)$ et $S(NB)$ et chacun sera supérieur à la moitié de ces quatre surfaces. Cette opération pouvant être effectuée indéfiniment, les aires $S(AJ)$ et $S(BJ)$ sont donc égales.

Ce résultat sur l’égalité des aires lui permet de démontrer une propriété remarquable de l’hyperbole (proposition 109) : si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, alors les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique (chap. IV).

La méthode utilisée par G. De Saint-Vincent reste fastidieuse et ne permet pas d’établir toutes les quadratures. Par la suite, les mathématiciens du XVII^e^ siècle vont inventer de nouvelles méthodes de détermination des aires et des volumes dont une assez remarquable par sa simplicité : la méthode des indivisibles.

L’héritage de Kepler

Il nous paraît essentiel de présenter ici l’influence de Kepler car l’utilisation de l’infini lui permet d’élaborer des méthodes novatrices.

C’est en faisant le plein de tonneaux de vin à l’occasion de son second mariage en 1613 que Johannes Kepler (1571-1630) s’étonne de voir le vendeur mesurer leur volume à l’aide d’une simple tige graduée, une velte, et ce quelle que soit leur forme. Il s’intéresse alors à la mesure de leur volume et publie en 1615 la *Nova Sterometria Doliorum Vinariorum* [6]. Il y rappelle quelques résultats d'Archimède sur le cercle, le cylindre ou la sphère mais remarque que les démonstrations « parfaites à tous les titres » sont tout de même réservées à « quelqu'un qui n'a pas de l'aversion pour leur lecture subtile » [1].

Kepler recourt à l'infini et abandonne les démonstrations grecques de l'Antiquité qui font encore référence à cette époque. Voyons sa démonstration de la proposition 1 d'Archimède sur la mesure du cercle : un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle et l'autre au rayon. Là où Archimède utilise le double raisonnement par l'absurde en inscrivant et en circonscrivant au cercle des polygones réguliers ayant un nombre de côtés aussi grand qu'on le souhaite, Kepler quant à lui conçoit la circonférence d'un cercle comme constituée d'une infinité de segments infiniment petits (fig. 6) :

> *Archimède se sert d'une démonstration indirecte qui conduit à l'impossible. Pour moi le sens est celui-ci. La circonférence du cercle bg a tout autant de parties que de points, pense une infinité ; chacune d'elles peut être considérée comme la base d'un certain triangle isocèle de jambes égales à ab, de sorte qu'ainsi les triangles se trouvent en nombre infini dans l'aire du cercle, tous se réunissant dans le centre a par les sommets.*

Kepler imagine ainsi le disque décomposé en une infinité de triangles isocèles de même base et même hauteur que chacun des triangles de sommet *a* et composant le triangle *abc* dont la base *bc* est égale à la circonférence du cercle et la hauteur *ab* égale au rayon du cercle. D'où l'égalité du triangle *abc* et du disque. Kepler mentionne également l'égalité avec le rectangle *abhd* où *h* est le milieu de *bc*.

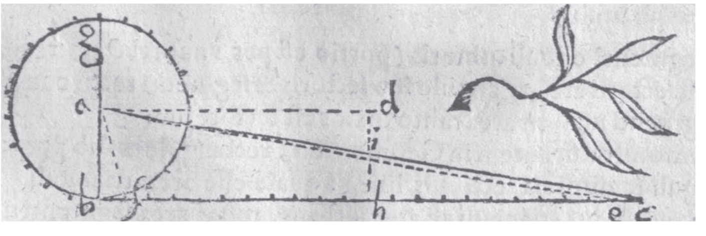


Fig. 6 : Aire d'un disque par Kepler

Il utilise aussi une décomposition infinie afin de déterminer des volumes. Ainsi, le disque de base du cylindre (fig. 7) est décomposé de la même façon que précédemment en une infinité de triangles, et chaque triangle définit la base d'un prisme ayant même hauteur que le cylindre et l'ensemble des prismes remplit le cylindre donc le volume du cylindre est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur. De même pour le volume d'un cône : chaque triangle infinitésimal est la

[1] « si quis à spinosa lectione eorum non abhorruerit », J. Kepler, *Nova Sterometria Doliorum Vinariorum Kepler,* Linz, 1615, p. 63.

base d'une pyramide et l'ensemble des pyramides de même sommet remplit un cône. Or, chaque pyramide infinitésimale est le tiers de chaque prisme donc le volume du cône est égal au tiers de celui du cylindre.

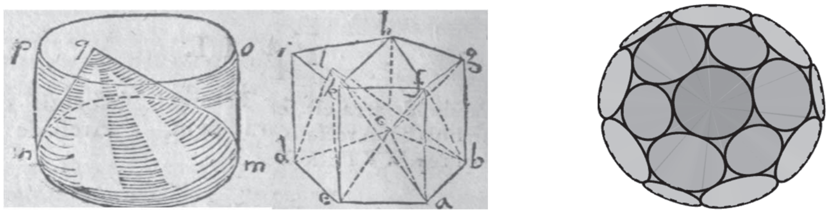


Fig. 7 : Volumes du cylindre, du cône et de la sphère par Kepler

Kepler imagine également une décomposition infinie de la sphère (fig. 7) :

> *En effet par analogie avec ce qui a été dit au théorème II, le corps de la sphère contient en soi comme une infinité de cônes allant avec la sphère par les sommets dans le centre, par les bases dont les points se tenant sur la surface entretiennent la succession.*

La sphère est décomposée en une infinité de cônes de base infinitésimale recouvrant sa surface dont les hauteurs sont égales au rayon puisque leur sommet est au centre de la sphère. Donc son volume est égal à un tiers de sa surface multipliée par son rayon. Kepler applique encore sa méthode pour déterminer le volume d'un tore. Il le sectionne en une infinité de cercles qu'il empile afin de reconstituer un cylindre dont la base a le même rayon que le cercle section et dont la hauteur est égale au périmètre du cercle décrit par le centre du cercle section (fig. 8). On retrouve ainsi le volume du tore qui aujourd'hui s'écrirait $\pi r^2 \times 2\pi R$. On peut observer également sur la figure 8 d'autres volumes comme celui en bas à droite en forme de pomme avec lequel il reconstitue un cylindre tronqué.

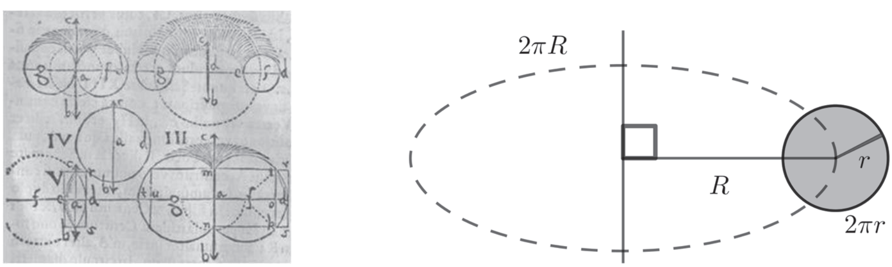


Fig. 8 : Volume du tore par Kepler

Les techniques de décomposition de Kepler comme celle du tore en une infinité de sections sont révélatrices d'une volonté de déterminer de nouvelles techniques dont la plus répandue au XVII^e siècle va être celle des indivisibles.