I- LA HAUTE ANTIQUITÉ

Dans ce premier chapitre, il sera question des sciences des nombres et des figures dans la Haute Antiquité orientale et occidentale.

Introduction

On ne rentrera pas, au cours de ce chapitre, qui se situe dans la Haute Antiquité, dans des considérations de pure érudition. On se bornera à relever l'apparition de considérations qui préfigurent les notions qui sont précisées dans les chapitres suivants. On se reportera ainsi au Chapitre II pour la naissance des mathématiques grecques, au Chapitre III pour les mathématiques arabes et au Chapitre IV pour celles nées aux Indes et en Chine.

Les manifestations de « procédés mathématiques » très anciens, relatifs soit à des nombres soit à des figures, soulèvent presque toutes de nombreuses conjectures et débats (1).

Par exemple le « zéro » serait apparu, durant la Haute Antiquité, au moins en quatre pays ; avec des notations variables (ou même grâce à une absence de signe), avec une valeur soit positionnelle, soit non. Les Mésopotamiens utilisent un zéro depuis le III^{e} siècle avant notre ère.

On ignore qui est le véritable inventeur de notre actuel ***système décimal, de position, avec zéro***. Les Arabes l'ont reçu des Indiens. Mais il est possible que ces derniers aient reçu ce système des anciens Grecs.

De même qui a créé l'Algèbre ? Les Arabes connaissaient peut-être certains manuscrits de Diophante qui aurait pu être inspiré par les Babyloniens (voir les chapitres II et III). Les Chinois aussi pratiquaient une véritable algèbre.

La même incertitude concerne les origines de la discipline que nous nommons « Géométrie ». Son nom vient d'un mot grec « Geometer » qui veut dire « mesure de la Terre ». Ainsi les ***Égyptiens*** connaissaient l'aire du triangle, celle du cercle, les volumes de divers cylindres ou pyramides, d'une manière empirique. Il n'y avait peu ou pas de lien logique entre les formules qu'ils utilisaient. De même les Babyloniens connaissaient la similitude des triangles, le théorème de Pythagore. Aucune théorie géométrique véritable ne sera construite avant la grande période des Grecs. Enfin les Chinois connaissaient un grand nombre de constructions géométriques, non reliées entre elles sur le plan logique. Cela ne les empêchait pas de posséder, dès le II^{e} siècle de notre ère, une démonstration du théorème de Pythagore (4). Ce dernier a été ainsi « inventé » en divers pays au cours de l'Antiquité.

La courte CHRONOLOGIE ANTIQUE qui suit fournira quelques repères pour cette période fort longue.

– 3300 :	Naissance de l'écriture en Mésopotamie, Haute et Basse Égypte, Inde et Pakistan, Phénicie, Assyrie, Chine, le plus souvent aux fins de transmettre des acquis économiques (élevage, agriculture) ou pré(pseudo)-scientifiques (astronomie, astrologie).
– 3000 :	Les Sumériens ont une arithmétique avec une numération positionnelle, de base 60, sans zéro (commerce).
– 2700 :	Débuts de l'arithmétique et de l'astronomie en Chine.
– 1900 :	Les mésopotamiens ont une numération positionnelle, de base 100.
– 1800 :	Les Babyloniens ont une numération positionnelle, de base 60.
– 1800 :	Débuts de la géométrie Égyptienne.
– 1650 :	Les Égyptiens utilisent une numération décimale, non de position et sans zéro.
– 1122 :	Début des mathématiques chinoises.
– 200 :	Numération chinoise, de base 10, sans zéro et non positionnelle.
+ 300 :	Les Indiens ont une numération positionnelle, décimale et avec zéro.

On va examiner les principaux apports, durant la Haute Antiquité, des
1 - Sumériens et Babyloniens,
2 - Égyptiens,
3 - Indiens,
4 - Chinois.

1- Sumériens et Babyloniens

Il est courant d'admettre qu'en ce qui concerne le Moyen-Orient, la géométrie, littéralement « mesure du sol » recouvré après les crues des fleuves (Tigre, Euphrate, Nil), est née en Mésopotamie et en Égypte.
Les Sumériens (2) établis autour du Tigre et de l'Euphrate, utilisaient, dès l'an 3000, divers systèmes numériques pour codifier et conserver les acquis de leurs arts techniques et commerciaux. Ils utilisaient un grand nombre de signes et une numération de base 60 et de position. Vers l'an 2000 (Hamurabi) on utilise les inverses des entiers, en particulier des inverses des multiples de 60. Les **tables d'inverses** servent à effectuer des opérations de division.
Les Babyloniens savaient sommer une progression arithmétique ou géométrique d'au plus dix termes. Ils connaissaient le théorème de Pythagore. Ils donnaient au nombre π la valeur approchée égale à 3. Ils calculaient les solutions d'équations générales d'ordre 1 ou 2. Grâce à des tables de carrés, ils déterminaient des racines carrées. De même pour la puissance trois (racines cubiques).
Ils calculaient enfin, par approximation, diverses grandeurs attachées à des figures géométriques : diagonale du rectangle, volume d'une pyramide ou d'un cône, de base et de hauteur mesurées par leur aire et leur longueur.

2- Les Égyptiens

Ils mêlaient les mathématiques et l'astronomie. L'observation des planètes fut d'abord motivée par des problèmes de calendrier. En 1660 av. J.-C., un papyrus

dit le « Rhin » contient des calculs en base 10, le zéro étant figuré par un blanc. Pour la vie pratique on utilisait un système compliqué de fractions. On dressait des tables d'inverses d'entiers dont les sommes fournissaient les fractions les plus générales.
La Géométrie a précédé et inspiré celle de la Grèce. Les Égyptiens savaient évaluer les aires des triangles et rectangles, les volumes des pyramides et des cylindres. Le nombre π était évalué par $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1605$. La formule des trois niveaux (3) était connue. Avant le Grec Euclide, les Égyptiens connaissaient divers résultats relatifs à la géométrie du triangle et à celle du cercle. On construisait un angle droit au moyen du triangle de côtés 3, 4 et 5 unités.

3- Les Indes

Les mathématiciens indiens ont eu un rôle important dans la création d'un système de numération qui est pratiquement le nôtre : système de position, avec dix chiffres dont un zéro spécifique. Le rôle de l'Inde ne fut reconnu que récemment car des systèmes ***assez voisins*** étaient parfois utilisés dans la Haute Antiquité (Grecs, Égyptiens, Babyloniens). Notre système actuel sera alors appelé le système « indo-arabe ». Les Indiens écrivaient, de manière déjà moderne, les fractions avec un « numérateur » placé au-dessus d'un « dénominateur ».

4- La Chine

Les Chinois usaient entre les XIV^{e} siècle et XI^{e} siècle av. J.-C. d'un ***système de numération sans zéro***, avec dix symboles de un à dix et des symboles par les premières puissances utiles de dix.
Les opérations manuelles sur les nombres se faisaient sur des jonchets et sur des bouliers : addition, multiplication, ***division avec reste***, calculs des fractions et calcul des racines carrées. On traitait les équations du premier degré par des substitutions successives portant sur les diverses inconnues (nos substitutions dites de Gauss). On savait traiter les équations du second degré à une inconnue.
En géométrie on connaissait la valeur du nombre π à un dix millième près, cette évaluation se faisant grâce à un encadrement du cercle entre des polygones réguliers inscrits et circonscrits. On connaissait le triangle de côtés 3, 4 et 5. On savait établir le théorème du triangle rectangle, dit de Pythagore, au moyen de triangles et de carrés (4).

Notes du Chapitre I

(1) C'est seulement depuis 1900 que l'on a cherché à dater la naissance des différentes notions dans les divers pays, particulièrement aux Indes. Voir la bibliographie de ce chapitre.

(2) Les Sumériens, d'origine iranienne, conquirent la Mésopotamie, dont la ville de Babylone. Leurs successeurs sont alors désignés sous le nom de Babyloniens. Ceux-ci furent eux-mêmes conquis en l'an 2000 par Hamurabi.

(3) La plupart des volumes que l'on savait évaluer à cette époque sont donnés par une unique formule (moderne) du calcul infinitésimal et appelée « **formule des trois niveaux** ». Si la hauteur du solide est h, les aires des sections extrêmes sont S_0 etS_2, l'aire à mi-hauteur est S_1, le volume est alors $V = \dfrac{h}{6}(S_0 + 4S_1 + S_2)$. Appliquez cela à la sphère, au cylindre droit, à la pyramide, au cône et aussi en les tronquant par des plans parallèles aux bases. De même l'ellipsoïde et plus généralement si l'aire $S(z)$ de la section plane de côté z est un **polynôme du second degré, au plus**, de cette même cote. La démonstration est élémentaire au moyen d'une primitive très simple.

(4) cf. [R.T.], tome 1, page 190. Soit T un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur a, b et c pour les côtés de l'angle droit ($b \leqslant c$). Dans un carré de centre O et de côté $b+c$, on place un carré (homothétique par rapport à O) de côté $c-b$, ainsi que 8 triangles égaux à T. On dessine alors un troisième carré, de côté a et d'aire a^2. L'aire de ce dernier carré est alors $(b-c)^2 + 4 \cdot \dfrac{bc}{2} = b^2 + c^2$. On en déduit l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$.

Bibliographie du chapitre I

[E.U.] ENCYCLOPEDIA UNIVERSALIS. Chine (5,630) (1996), Inde (12,65), Notations mathématiques (16,475)

[G.I.] Georges IFRAH. Histoire universelle des chiffres ; Tomes 1 et 2.

[N.R.] Nicolas ROUCHE. Pourquoi ont-ils inventé les fractions ? L'Esprit des sciences, *Ellipses*, (1998).

[M.S.] Michel SERRE. Éléments d'histoire des sciences, *Larousse* (1989 et 1997)

[R.T.] René TATON. Science antique et médiévale ; Tome 1, *P.U.F.*, 1957.

II- LES MATHÉMATIQUES GRECQUES

Dans ce second chapitre, il sera question des mathématiques grecques depuis le VI^{e} *siècle avant notre ère jusqu'à l'an 530 après J.-C.*

Section 1 : De Thalès de Milet à l'époque d'ARISTOTE

(du VII^{e} siècle au IV^{e} siècle av. J.-C.)

1.1- THALÈS

Le plus ancien des savants Grecs naquit à Milet au VII^{e} siècle av. J.-C. et voyagea en Mésopotamie et en Égypte, où il apprit l'astronomie et les mathématiques. Il fut célèbre aussitôt pour avoir prévu l'éclipse du soleil de l'année 585. Il semble que le théorème (appelé de Thalès par nous) sur les rapports des segments limités par deux sécantes à diverses droites parallèles, ait été connu des Égyptiens et des Babyloniens bien avant lui.
Il prouva l'égalité des angles opposés par le sommet, trouva la construction du cercle circonscrit à un triangle donné.
Sa théorie des triangles semblables est à l'origine de la légende suivant laquelle il aurait donné la hauteur d'une pyramide, en Égypte, grâce à la mesure des éléments de son ombre portée du soleil.

1.2- PYTHAGORE

Philosophe et mathématicien du VIe siècle av. J.-C., il n'est pas très bien connu, car il n'a laissé aucune œuvre écrite. Il fit la synthèse de résultats qu'il apprit au cours de ses voyages en Perse, Égypte, Crète et Gaule. Il appliqua sa doctrine, selon laquelle « tout est nombre » à la musique, à l'observation. Il pratiqua le calcul des « proportions ». Il établit que la somme des angles d'un triangle est de deux droits. Le théorème concernant le triangle rectangle et qui porte son nom était connu plus de 1000 ans avant lui. Il eut divers élèves, mal connus.
Les PYTHAGORICIENS connaissaient les cinq polyèdres réguliers (THÉETÈTE, cf. note (3)) et, pour de seules raisons d'esthétique, ils affirmaient que la Terre devait être sphérique. Leur plus grande découverte, dont l'histoire est mal connue, fut celle des rapports de longueur qui ne peuvent pas être des fractions. Mêlant théorie atomique et géométrie il y virent un « scandale ». Ce fait, tenu secret, fut le début de la théorie des nombres irrationnels. Comme on le verra dans le début de notre deuxième partie, il s'agit là d'un des premiers « paradoxes » de l'histoire des mathématiques, fondateur des mathématiques comme science rationnelle. Ce paradoxe est relié à celui des « parallèles » (dit postulat d'Euclide) dans la figure formée d'un carré et de ses diagonales.
Bien avant PLATON, PYTHAGORE demandait que l'on donne une explication mathématique de tout phénomène observé.

Les Pythagoriciens ont écrit, bien avant EUCLIDE, de nombreuses synthèses de géométrie mal conservées. La « quadrature du cercle, à la règle et au compas » est tentée, sans succès déjà, par HIPPOCRATE (450 av. J.-C.).
Les sophistes, dont ZÉNON d'ELÉE, spéculaient sur des séries convergentes (1), inaugurant ainsi l'étude des « nombres réels ».

1.3- EUDOXE

Philosophe, astronome et mathématicien, il a vécu de 400 à 355 av. J.-C. et a rédigé, avant Euclide, des traités sur les mathématiques de son temps. Il a travaillé sur le volume de la pyramide, donnant son volume, comme tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur. Il est précurseur de la **méthode d'exhaustion**, avant Euclide et Archimède. Cette méthode fait de lui l'un des fondateurs du calcul infinitésimal (5). Il l'applique aux figures usuelles de la géométrie. Il étudie le problème de la duplication du cube : construire un cube ayant un volume **double** de celui d'un cube donné. Il voit le rôle d'équations du second degré dans l'étude des sections planes d'un cône de révolution. Il introduit la division harmonique en géométrie avec la moyenne harmonique (6).
Consulter [J. I.] de la bibliographie.

1.4- Les idées de Platon et d'Aristote sur les mathématiques

Les deux grands philosophes grecs, PLATON et ARISTOTE ont beaucoup parlé des sciences. Ils ont apprécié différemment la place des mathématiques parmi elles (cf. [J. D.] de la bibliographie).

1.4.1- PLATON

Né à Athènes en 428 av. J.-C., il fut un disciple de SOCRATE (7). PLATON affirme que les « Idées » existent en dehors de tout objet matériel. Parmi elles se trouvent les « mathématiques ». Il estime que « les mathématiques sont la science des relations stables » (P.H. Michel). Les **concepts** sont susceptibles de définitions qui doivent alors, selon lui, avoir des relations stables entre elles (8).
Nous adopterons le jugement du contemporain Pierre BRUNET selon lequel « PLATON a exagéré la transcendance des objets mathématiques. Ainsi, sans ouvrir véritablement la voie à la physique mathématique, il a, plus qu'aucun autre, contribué à détacher la recherche scientifique de l'observation de la Nature, vers laquelle l'ont au contraire ramené ARISTOTE et son disciple THÉOPHRASTE ».

1.4.2- ARISTOTE

Né en 384 av. J.-C., médecin et philosophe, il s'intéressait au Cosmos et affirmait que la matière céleste se composait de l'**éther** (4). Il estimait que l'Univers est infini, dans l'espace et dans le temps : sans début ni fin. Avec ses disciples, il couvrit toutes les connaissances du temps. Pour lui, les raisonnements ont toujours le pas sur les expériences pratiques ; il **écarte les expériences** qui risqueraient d'infirmer la conclusion de raisonnements acquis. Il admet tout au plus des expériences méthodiques. Surtout pour ARISTOTE, les mathématiques ne sont alors qu'un « instrument des sciences ».
Au contraire de PLATON qui part de l'**Idée** vers la **Réalité**, ARISTOTE considère que les **concepts** résultent de l'**expérience** et de l'**observation**.

Il est alors certain, pour l'Histoire de la Science, que la Scolastique, de nature logisticienne, a cru suivre ARISTOTE et a ainsi retardé la naissance d'une véritable science expérimentale. En fait, selon le contemporain Étienne GILSON « c'est l'Averroïsme et non la scolastique en général que l'on a le droit d'assimiler à un aristotélisme obstiné et borné » (9).

Un trait caractéristique d'ARISTOTE est qu'il voulait toujours faire une « Histoire des problèmes » et confronter les opinions des savants sur ceux-ci. Il conforte ainsi l'histoire des sciences... Dans l'ensemble nous pensons pouvoir estimer que les scientifiques ont des opinions trop tranchées sur PLATON et sur ARISTOTE, en particulier dans les sciences proches des Mathématiques et de la Physique. On trouvera un exemple d'étude sérieuse et nuancée en [J.D.].

Notes du chapitre II - Section 1

(1) La somme $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$, avec n entier, a pour différence d'avec 2 le nombre (arbitrairement petit) $\frac{1}{2^n}$, pour n assez grand. Les Sophistes, dont ZÉNON d'ELÉE, affirmaient alors qu'une flèche n'atteindrait jamais un mur, ayant, à tout pas, un chemin qu'il reste à parcourir. Cherchez le sophisme, qui est classique en théorie moderne des nombres réels (à partir du XIX^e siècle).

(2) Au fronton du « Lycée » était écrite la fameuse formule : « que nul n'entre ici s'il n'est géomètre ».

(3) Les Grecs attribuaient, pour des raisons mystiques, à chacun des 5 polyèdres réguliers, un élément constitutif, à leurs yeux, de tout l'Univers. Le cube est attaché à la **Terre**, le tétraède régulier (ou pyramide régulière) : le **feu**, l'octaèdre régulier : l'**air**, l'icosaèdre : l'**eau**, le dodécaèdre enfin : le **Cosmos**. Ce dernier se rapproche le plus de la Sphère, symbole du Monde. Le Moyen Âge et les scolastiques abusèrent longtemps de ces correspondances.

(4) On sait que l'**éther**, encore considéré au XIX^e siècle et au début du XX^e siècle, fut rejeté par Albert EINSTEIN, pour qui la lumière peut se propager dans le vide.

(5) Par exemple si un cercle (C) est donné, un polygone régulier inscrit de n côtés, a pour aire s_n, un polygone régulier circonscrit de n côtés, a pour aire S_m, on a $s_n < S_m$ et la différence $S_m - s_n$ est aussi petite que l'on veut pourvu que n et m soient assez grands. On prenait $n = m = 2^k$ et k augmentait indéfiniment. Reportez-vous aux nombres réels (que les Grecs n'avaient pas définis) : on a ainsi deux suites **adjacentes** qui définissaient l'aire du cercle. Le procédé est effectif pour le calcul de π notamment et converge assez rapidement.

(6) A, B, C, D sont alignés et on a $\frac{2}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{1}{\overline{\overline{AC}}} + \frac{1}{\overline{\overline{AD}}}$: la longueur AB est « moyenne harmonique » de celles de AC et AD. Voir les chapitres de géométrie (2ème partie).

(7) SOCRATE, mort comme on le sait en 399, pratiquait le dialogue et n'a pas laissé d'oeuvre écrite.

(8) La théorie de la définition est loin d'être aisée. Pour les modernes, comme HILBERT, l'existence est synonyme de « non contradiction » entre les axiomes qui le définissent. Voir un traité de logique. Se reporter au chapitre 7 de la deuxième partie.

(9) Pour AVERROÈS, voir le chapitre sur les sciences arabes (chapitre III).