

Généralités sur les graphes	1
1. Définitions et concepts de base	2
1.1. Graphes : concepts orientés	2
1.2. Graphes et applications multivoques	2
1.3. Graphes : concepts non orientés	3
1.4. Principales définitions	4
2. Matrices associées à un graphe	6
2.1. Matrice d'incidence sommets-arcs	6
2.2. Matrice d'incidence sommets-arêtes	7
2.3. Matrice d'adjacence ou : matrice d'incidence sommets-sommets	8
2.4. Les différentes représentations d'un graphe	9
2.4.1. À partir de la matrice d'adjacence	9
2.4.2. À partir de la matrice d'incidence sommets-arcs ou sommets-arêtes	11
2.4.3. Passages entre les différentes représentations	13
3. Connexité	14
3.1. Chaîne. Chaîne élémentaire. Cycle. Cycle élémentaire	14
3.2. Chemin. Chemin élémentaire. Circuit. Circuit élémentaire	14
3.3. Connexité. Nombre de connexité	15
3.4. Point d'articulation, k -connexité, k -arête-connexité	19
3.5. Graphe fortement connexe. Composantes fortement connexes	22
4. Cycles et cocycles. Nombre cyclomatique	27
4.1. Définition	27
4.2. Vecteur associé à un cycle. Somme de deux cycles	27
4.3. Cycles indépendants. Base de cycles	27
4.4. Cocycles. Vecteur associé à un cocycle	28
5. Quelques graphes particuliers	29
5.1. Les graphes sans circuits	29
5.2. Les graphes planaires	30
5.3. Les graphes aux arêtes et les graphes aux arcs	32
5.4. Les graphes parfaits	34

6. Les hypergraphes	36
7. Graphes aléatoires et connexité	41
Exercices	43
Références bibliographiques	47

Chapitre 2

Le problème du plus court chemin.	49
1. Définitions et exemples	50
Conditions d'existence.	51
2. Les algorithmes.	51
2.1. Algorithme de Moore-Dijkstra ($l(u) \geq 0$)	52
Queues de priorité.	56
2.2. Cas où $l(u) = 1, \forall u \in U$	57
2.3. Graphe G et longueurs $l(u)$ quelconques.	58
2.4. Cas des graphes sans circuit	65
2.5. Algorithmes matriciels	69
2.6. Problèmes voisins	74
2.6.1. Recherche d'un circuit de longueur moyenne minimum.	74
2.6.2. Recherche d'un circuit de longueur moyenne pondérée minimum.	75
2.6.3. Recherche du k -ième plus court chemin d'un sommet l à tous les autres	76
2.6.4. Plus court chemin avec longueur des arcs dépendant du temps	77
2.6.5. Plus court et plus long chemins élémentaires	77
2.6.6. Recherche de circuit de longueur négative	81
3. Le problème central de l'ordonnancement	81
3.1. Le graphe potentiels-tâches	82
3.2. Le graphe potentiels-étapes	85
3.3. Quelques compléments pratiques	86
Exercices	89
Références bibliographiques	101

Chapitre 3

Algèbres de chemins et dioïdes	105
1. L'algèbre du plus court chemin.	105
2. Définitions et propriétés.	107
2.1. Une classe d'algèbres de chemins : les dioïdes.	107
2.2. Matrice d'incidence généralisée d'un graphe.	109
2.3. Quelques théorèmes de convergence	111
3. Quelques exemples	116
3.1. Problèmes d'existence et de connexité	116
3.2. Problèmes d'énumération	117
3.3. Chemin de capacité maximum	119
3.4. Chemin de nombre d'arcs minimum	119
3.5. Plus court chemin	119
3.6. Plus long chemin.	120

3.7. Chemin de fiabilité maximum	120
3.8. Les problèmes multicritères	120
3.9. Problèmes de dénombrement	122
3.10. Chaînes de Markov	122
3.11. Fiabilité d'un réseau	123
3.12. Les problèmes de k -ième chemin	123
3.13. Les chemins η -optimaux	125
4. Algorithmes généraux	126
4.1. Algorithme de Jacobi	128
4.2. Algorithme de Gauss-Seidel	130
4.3. Algorithme de Jordan pour la quasi-inversion d'une matrice	133
5. Algèbres de chemins dans un graphe sans circuit	137
6. Un dioïde particulier	139
7. Les dioïdes à gauche et à droite	141
8. Généralisation des algèbres de chemins	144
8.1. L'algèbre des endomorphismes	144
8.2. Quelques exemples	146
8.3. Quelques algorithmes	148
9. Théorie des dioïdes et applications	152
9.1. Solution d'équations non linéaires dans un dioïde	152
9.2. Dépendance linéaire et indépendance dans les dioïdes. Bidéterminants	153
9.3. Valeurs propres et vecteurs propres	156
Exercices	158
Références bibliographiques	162

Chapitre 4

Arbres et arborescences	165
1. Arbres. Définitions et propriétés	165
1.1. Définitions	165
1.2. Propriété 1	168
1.3. Algorithme de construction d'une forêt maximale d'un graphe	168
1.4. Théorème 1	170
1.5. Coarbre. Définition	171
2. Le problème de l'arbre de poids minimum	172
2.1. Théorème 3	172
2.2. Théorème 4	173
2.3. Algorithme primal de Kruskal	174
2.4. Algorithme primal avec arcs dans le désordre	175
2.5. Algorithme dual de Kruskal	175
2.6. Algorithme dual avec arcs dans le désordre	176
2.7. Algorithmes pour G connexe	176
2.8. Arbre de poids maximum	178
2.9. Recherche des chaînes de section maximale (ou minimale)	178
2.10. Arbre de poids minimum et classification hiérarchique sous dominante	179
2.11. Arbre de condensation et arbre de classification	182
2.12. Structure algébrique des classifications hiérarchiques	185

3. Arborescences.	187
3.1. Définition	187
3.2. Théorème 7	190
3.3. Le problème de l'arborescence de poids minimum	192
3.4. Algorithme de recherche d'une arborescence de poids minimum.	194
3.5. Exemple.	195
Exercices	198
Références bibliographiques.	206

Chapitre 5

Flots et réseaux de transport.	209
1. Définitions et propriétés	210
1.1. Définition	210
1.2. Définition algébrique des flots	211
1.3. Cycles élémentaires et flots élémentaires.	211
1.4. Décomposition d'un flot en somme de cycles élémentaires	212
1.5. Le lemme des arcs colorés	213
1.6. Décomposition en circuits d'un flot positif ou nul.	214
2. Le problème du flot maximum dans un réseau de transport.	215
2.1. Définition. Position du problème	215
2.2. Exemple : affectation de p tâches à q machines.	216
2.3. Définition des coupes. Capacité d'une coupe.	216
2.4. Le théorème du flot maximum et de la coupe minimale	217
2.5. Graphe d'écart. Définition	218
2.6. Algorithme de recherche d'un flot maximum	219
2.7. Extensions diverses.	222
2.8. Algorithme de Ford et Fulkerson avec bornes inférieures de capacité	226
3. Le problème du flot compatible. Théorème de compatibilité	227
3.1. Une condition nécessaire d'existence.	227
3.2. Algorithme 2 : recherche d'un flot compatible	227
4. Flots et connexité	230
4.1. La k -arête connexité	230
4.2. La k -arc-connexité	233
4.3. La k -connexité.	234
4.4. La k -forte connexité	235
5. Flots à coût minimum.	236
5.1. Le problème général du flot à coût minimum. Méthode des arcs non conformes (algorithme primal-dual)	236
5.2. Graphes sans borne de capacité : problème de transbordement, transport et dérivés. Algorithme primal-dual	244
5.3. Flots à coût minimum avec bornes inférieures et bornes supérieures de capacité (algorithme primal)	250
5.4. Flots à coût minimum avec bornes inférieures nulles (algorithme dual).	253
5.5. Spécialisations de la méthode du simplexe aux problèmes de flots.	255
Exercices	255
Références bibliographiques.	280

Chapitre 6

Flots avec multiplicateurs. Multiflots	285
1. Flots avec multiplicateurs	285
1.1. Définitions	285
1.2. Le problème du flot à perte minimale	286
1.3. Le problème du flot avec multiplicateurs et de coût minimum	288
1.4. Chaînes augmentantes, chaînes génératrices et chaînes absorbantes	289
1.5. Caractérisation des flots avec multiplicateurs à composantes positives. Théorème de décomposition	294
1.6. Graphe d'écart associé à un flot φ^0 donné	300
1.7. Algorithmes pour les problèmes de flots à perte minimale	301
1.8. Algorithmes pour les problèmes de flots avec multiplicateurs de coût minimum	304
2. Problèmes de multiflots	312
2.1. Définitions et exemples	312
2.2. Formulation sommets-arcs des problèmes de multiflots	315
2.3. Formulation arcs-chemins des problèmes de multiflots	317
2.4. Étude du problème du multiflot compatible	321
Définition	323
2.5. Multiflots compatibles et de coût minimum : une méthode de décomposition par affectation de capacités	327
Exercices	335
Références bibliographiques	349

Chapitre 7

Couplages et b-couplages	353
1. Le problème du couplage maximum	353
1.1. Définition et exemples	353
1.2. Définitions	355
1.3. Chaînes alternées	356
1.4. Théorème 1	357
2. Algorithme de recherche d'un couplage maximum	358
2.1. Lemme 2	358
2.2. Lemme 3	360
2.3. Recherche des chaînes alternées d'origine fixée : arbres alternés	360
2.4. Algorithme 1 : Construction d'un arbre alterné	362
2.5. Algorithme 2 : recherche d'un couplage maximum	366
2.6. Exemple	367
Éclatement d'une orbite	369
2.7. Description du graphe G' : sommets et pseudo-sommets	370
2.8. Tableau descriptif du couplage K	373
2.9. Examen des arêtes à l'étape courante de l'algorithme 1	374
2.10. Complexité de l'algorithme de couplage maximum	375
3. Couplage de poids maximum	376
3.1. Définitions	376
3.2. Théorème 3	377
3.3. Théorème 4	379

4. Un algorithme pour le problème du couplage de poids maximum	379
4.1. Lemme 4	379
4.2. Lemme 5	379
4.3. Corollaire 3	380
4.4. Algorithme 3 : Couplage de poids maximum	382
4.5. Complexité de l'algorithme 3	387
5. b -Couplages. b -Couplage maximum et b -couplage de poids maximum	388
5.1. Définitions.	388
5.2. Graphe d'écart	389
5.3. Chaînes alternées	390
Exercices	391
Références bibliographiques	404

Chapitre 8

Parcours eulériens et hamiltoniens	407
1. Cycles et chaînes eulériens	408
1.1. Définitions.	408
1.2. Théorème 1	408
1.2. Algorithme de recherche d'une chaîne eulérienne	409
2. Le problème du « Postier chinois » (non orienté)	411
2.1. Lemme 1	412
2.2. Lemme 2	412
2.3. Lemme 3	413
2.4. Théorème 2	413
2.5. Exemple	414
3. Circuits et cycles hamiltoniens	416
3.1. Définitions.	416
3.2. Conditions nécessaires d'existence de cycles hamiltoniens	418
3.3. Conditions suffisantes d'existence d'un cycle hamiltonien	419
3.4. Conditions suffisantes d'existence d'un circuit hamiltonien	426
Exercices	431
Références bibliographiques	447

Chapitre 9

Matroïdes	451
1. Définitions et résultats fondamentaux	451
1.1. Introduction.	451
1.2. Définitions et exemples.	452
1.3. Rang	453
1.4. Clôture.	454
1.5. Stigmes	455
1.6. Autres exemples de matroïdes	456
1.7. Axiomatiques des matroïdes.	457
1.8. Matroïdes orientés.	459
2. Dualité	460
2.1. Théorème 3	460

2.2. Propriété 1	462
2.3. Opérations de réduction et de contraction	462
2.4. Dualité pour les matroïdes orientés	463
3. Le problème du sous-ensemble indépendant de poids maximum :	
l'algorithme glouton	465
3.1. Définition d'un ordre lexicographique	466
3.2. Théorème 5	466
3.3. L'algorithme glouton « primal »	467
3.4. Exemple des matroïdes graphiques : le problème de l'arbre de poids maximum	468
3.5. Exemple des matroïdes matriciels : le problème de la base de poids maximum	468
3.6. L'algorithme glouton dual : algorithme 2	469
3.7. Polyèdres matroïdaux	470
4. Intersection de matroïdes	473
4.1. Couplage dans un graphe biparti	473
4.2. Arborescences de poids maximum	474
4.3. Intersection de deux matroïdes matriciels	474
4.4. Un problème de coloration des arêtes d'un graphe	474
4.5. Séquences alternées et graphe d'alternance	475
4.6. Un algorithme pour le problème de l'intersection de cardinalité maximale	480
4.7. Intersections maximales et couvertures de rang minimal	482
4.8. Le problème de l'intersection de poids maximum. Algorithme 4	482
4.9. Intersection de deux polyèdres matroïdaux. Algorithme 5 (primal dual)	484
4.10. Intersections de k matroïdes ($k \geq 3$)	487
5. Matroïdes avec conditions de parité et généralisations	489
5.1. Le problème du couplage dans un graphe quelconque	489
5.2. Formulation en termes de matroïdes avec conditions de parité	489
5.3. Généralisation aux matroïdes quelconques. Lien avec les problèmes d'intersection de deux matroïdes	490
5.4. Problèmes de matroïdes avec conditions de k -parité	491
6. Polymatroïdes	493
6.1. Définitions et exemples	493
6.2. Polyèdres polymatroïdaux	496
Propriété 2	496
6.3. Problèmes de couplages dans les polymatroïdes	500
6.3.1. Recherche d'un sous-ensemble indépendant de poids maximum dans un matroïde	500
6.3.2. Intersections de matroïdes	500
6.3.3. Couplages dans les graphes	501
6.3.4. Matroïdes avec conditions de k -parité	501
6.3.5. Recherche d'une forêt maximale d'un hypergraphe 3-uniforme	501
6.3.6. Ensemble stable d'un graphe	502
6.4. Minimisation exacte, en temps polynomial, d'une fonction sous-modulaire générale	503
Exercices	508
Références bibliographiques	514

Les problèmes difficiles de la classe NP	519
1. Réductions et Relations d'équivalence entre problèmes	519
Réduction et équivalence au sens faible	520
Réduction et équivalence au sens fort	521
Formulation par un programme en nombres entiers	521
Formulation par une fonction d'ensemble	522
Formulation par recherche d'applications entre ensembles finis discrets	522
2. Partition et recouvrement d'un hypergraphe	522
2.1. Définitions et exemples	522
2.2. Les problèmes de sélection (recouvrement)	525
2.2.1. Sélection des fichiers dans une banque de données	525
2.2.2. Localisation de services	526
2.2.3. Simplification d'expressions booléennes	526
2.3. Les problèmes d'affectation (partition et quelquefois recouvrement)	527
2.3.1. Le problème de rotation des équipages	527
2.3.2. L'habillage des horaires des lignes d'autobus	528
2.3.3. Les problèmes de tournées	529
2.4. Cas particuliers de problèmes polynomiaux	529
2.4.1. Le cas de la matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe	530
2.4.2. Le cas d'un hypergraphe d'intervalles	530
3. Le problème du couplage d'un hypergraphe	532
3.1. Formalisation du problème	532
3.2. Quelques cas particuliers	533
4. Coloration d'un graphe et d'un hypergraphe	536
4.1. Coloration des sommets d'un graphe	537
4.2. Cas particulier de la coloration des arêtes	540
4.3. Quelques problèmes concrets	542
4.3.1. Problèmes d'emploi du temps	542
4.3.2. Problèmes de classification	543
5. Le problème du sac à dos multidimensionnel	543
5.1. Quelques exemples concrets	544
5.1.1. Le choix des investissements	544
5.1.2. Le chargement d'un bateau, d'un avion	544
5.1.3. Les problèmes de recouvrement et de couplage d'hypergraphes	544
5.1.4. Les problèmes de découpe industrielle (« cutting-stock »)	545
5.2. Un théorème d'équivalence	545
5.3. Un algorithme pseudo-polynomial	547
5.4. Le problème d'affectation généralisée	549
6. Les problèmes de coûts fixes et les fonctions d'ensemble	550
6.1. Le problème de la localisation	551
6.2. Le problème de l'optimisation d'un réseau	553
6.3. Quelques propriétés de sous-modularité	553
7. Les problèmes d'ordonnancement	555
7.1. Le problème du voyageur de commerce	555
7.2. Quelques variantes du problème du voyageur de commerce	556

7.3. Ordonnancement à contraintes disjonctives	557
8. Quelques autres problèmes concrets	559
8.1. Le graphe partiel sans circuit de poids maximum	559
8.2. Minimisation d'une fonction quadratique	559
9. Problèmes <i>NP</i> -complets et réductions entre problèmes	561
9.1. Réductions faibles et problèmes <i>NP</i> -complets	561
9.2. Les fortes réductions	564
Exercices	567
Références bibliographiques	587

Chapitre 11

Les algorithmes d'énumération par séparation–évaluation

et propagation de contraintes	591
1. Un exemple d'exploration par séparation, évaluation et propagation	592
2. Les procédures d'exploration par séparation et évaluation	595
2.1. Évaluation par défaut	596
2.2. Règles de séparation et pénalités	597
2.3. Bonne solution réalisable	599
2.4. Implications par propagation de contraintes	599
2.5. Déplacement dans l'arborescence	600
3. Deux exemples d'applications	602
3.1. Un problème d'ordonnancement d'atelier	602
3.1.1. Énoncé	602
3.1.2. Solution	603
3.2. Un problème de circuit hamiltonien	606
3.2.1. Énoncé	606
3.2.2. Solution	607
4. Évaluation par défaut et pénalités	611
4.1. Solution continue	611
4.2. Amélioration de la solution continue	613
4.3. Relaxation lagrangienne	615
5. « ALICE »	620
5.1. Représentation des problèmes	621
5.2. Le langage d'entrée d'« Alice »	623
5.3. Les heuristiques	624
5.4. Liste de problèmes résolus par « Alice » et résultats	624
Exercices	627
Références bibliographiques	646

Chapitre 12

Algorithmes approchés et métaheuristiques	651
1. Les algorithmes itératifs de voisinage	652
1.1. Principe général d'un algorithme itératif de voisinage	652
1.2. Les algorithmes procédant par relaxations successives	656
1.3. Fiabilité d'un algorithme itératif de voisinage	656
1.4. La métaheuristique du « recuit simulé »	658

1.5. La métaheuristique de « recherche Tabou »	661
1.6. Autres algorithmes itératifs aléatoires	663
2. Les algorithmes gloutons	665
2.1. Critère du coût moyen et extensions.	665
2.2. Le critère du coût marginal pour les fonctions d'ensemble	668
2.3. Critère du regret maximum	671
2.4. Algorithmes gloutons aléatoires (AGAT).	674
2.4.1. Algorithme glouton aléatoire RLFO	676
2.4.2. Deux algorithmes gloutons aléatoires pour le problème de recouvrement.	677
3. Les métaheuristicues inspirées de la biologie	681
3.1. Les algorithmes génétiques.	681
3.2. Les algorithmes de colonies de fourmis.	683
4. Régularisation des coûts.	685
4.1. Les transformations idéales	685
4.2. Interprétation économique des coûts régularisés.	687
5. Optimalité des algorithmes approchés.	688
5.1. Optimalité <i>a priori</i>	689
5.2. Optimalité <i>a posteriori</i>	690
5.2.1. Vérifications de l'optimalité	690
5.2.2. Vérification de l' ϵ -optimalité	691
5.2.3. Conditions suffisantes d'optimalité	691
Exercices	691
Références bibliographiques	704

Annexe I

Programmation linéaire	709
1. Définitions et résultats fondamentaux	709
1.1. Forme standard d'un programme linéaire	709
1.2. Définitions.	711
1.3. Rappels sur les ensembles convexes et les polyèdres.	711
1.4. Bases, bases réalisables, solutions de base.	712
1.5. Caractérisation des bases optimales.	714
2. La résolution des programmes linéaires.	717
2.1. L'algorithme primal du « simplexe » (forme révisée).	717
2.3. Matrices de changement de base et forme produit de l'inverse	719
2.4. Base de départ	720
2.5. Forme canonique et tableau simplexe.	721
3. La notion de dualité	724
3.1. Dual d'un programme linéaire sous forme standard.	724
3.2. Définition du dual dans le cas général	725
3.3. Le théorème de la dualité	725
3.4. Variables duales et coûts marginaux	727
4. Algorithmes dual et primal-dual	728
4.1. L'algorithme dual	728
4.2. L'algorithme primal-dual	731

5. Une application de la dualité : le théorème de Farkas et Minkowsky	734
Références bibliographiques	735

Annexe 2

Programmation linéaire en nombres entiers	737
1. Polyèdres de sommets entiers	738
2. Un algorithme de coupes	739
3. La méthode des congruences décroissantes	741
4. Développements récents : combinatoire polyédrique	743
Références bibliographiques	744

Annexe 3

Relaxation lagrangienne et résolution du problème dual	747
1. Définition du problème primal	747
2. Définition du problème dual et propriétés	749
3. Résolution du problème dual par programmation linéaire	752
4. Résolution du problème dual par une méthode de sous-gradient	754
Références bibliographiques	759

Annexe 4

Programmation dynamique	761
1. Méthodes et exemples	761
2. Améliorations de la programmation dynamique	765
Références bibliographiques	767

Annexe 5

Les problèmes de ratio minimum	769
1. Les algorithmes itératifs	770
2. L'algorithme par dichotomie	771
Références bibliographiques	775

Index	777
------------------------	-----