

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|------------|
| INTRODUCTION..... | V |
| AVANT-PROPOS | 5 |
| Chapitre 0. Rappels et compléments | 7 |
| 0.0 Notations. Rappels | 7 |
| 0.1 Algèbre extérieure | 9 |
| 0.2 Calcul différentiel | 15 |
| 0.3 Formes différentielles sur un ouvert d'un espace vectoriel | 24 |
| 0.4 Intégration | 32 |
| 0.5 Exercices | 35 |
| Chapitre 1. Equations différentielles | 36 |
| 1.1 Généralités | 37 |
| 1.2 Equations différentielles indépendantes du temps : existence de solutions locales | 39 |
| 1.3 Etude de l'unicité globale. Coulée globale. | 45 |
| 1.4 Champs de vecteurs dépendant du temps, champs de vecteurs dépendant d'un paramètre | 49 |
| 1.5 Unicité et coulée globale pour les champs de vecteurs dépendant du temps | 51 |
| 1.6 Culture et équations linéaires | 52 |
| Chapitre 2. Variétés différentielles | 55 |
| 2.1 Sous-variétés de \mathbf{R}^n | 56 |
| 2.2 Variétés abstraites | 62 |
| 2.3 Morphismes | 70 |
| 2.4 Revêtements, quotients | 76 |
| 2.5 Espaces tangents | 84 |
| 2.6 Sous-variétés, immersions, submersions, plongements | 96 |
| 2.7 Fibrés normaux, unitaires ; tubes | 101 |
| 2.8 Exercices | 107 |
| Chapitre 3. Partitions de l'unité. Densités. Courbes | 114 |
| 3.1 Plongement des variétés compactes | 115 |
| 3.2 Partitions de l'unité | 117 |
| 3.3 Densités sur une variété | 121 |
| 3.4 Classification des variétés connexes de dimension un | 127 |
| 3.5 Champs de vecteurs et équations différentielles sur les variétés | 131 |
| 3.6 Exercices | 138 |

| | |
|--|------------|
| Chapitre 4. Points critiques | 141 |
| 4.1 Définitions, exemples | 141 |
| 4.2 Points critiques non dégénérés d'une fonction numérique. Réduction de Morse | 145 |
| 4.3 Théorème de Sard | 157 |
| 4.4 Exercices | 160 |
| Chapitre 5. Calcul différentiel sur les variétés | 162 |
| 5.1 Le fibré T^*X | 163 |
| 5.2 Formes différentielles sur une variété | 164 |
| 5.3 Formes de degré maximum et orientation | 172 |
| 5.4 Groupes de de Rham | 187 |
| 5.5 Dérivée de Lie | 192 |
| 5.6 Ouverts étoilés ; lemme de Poincaré. | 196 |
| 5.7 Groupes de de Rham des sphères et des projectifs | 198 |
| 5.8 Groupes de de Rham des tores | 202 |
| 5.9 Exercices | 205 |
| Chapitre 6. Calcul intégral sur les variétés | 209 |
| 6.1 Intégrale d'une d -forme sur une variété orientée de dimension d | 210 |
| 6.2 Théorème de Stokes | 216 |
| 6.3 Premières applications du théorème de Stokes | 221 |
| 6.4 Forme volume canonique d'une sous-variété orientée d'un espace euclidien | 226 |
| 6.5 Volume d'une sous-variété orientée d'un espace euclidien | 230 |
| 6.6 Densité canonique d'une sous-variété d'un espace euclidien | 239 |
| 6.7 Volume des tubes I : compléments sur les formes volumes | 243 |
| 6.8 Volume des tubes II | 253 |
| 6.9 Volume des tubes III | 259 |
| 6.10 Exercices | 265 |
| Chapitre 7. Théorie du degré | 272 |
| 7.1 Lemmes préliminaires | 273 |
| 7.2 Détermination de $R^q(X)$ | 280 |
| 7.3 Degré | 283 |
| 7.4 Invariance du degré par homotopie. Applications | 287 |
| 7.5 Volume des tubes (fin) et formule de Gauss-Bonnet | 294 |
| 7.6 Degré des applications appartenant à $C^0(S^1 ; S^1)$ | 299 |
| 7.7 Indice d'un champ de vecteurs sur une variété abstraite | 303 |
| 7.8 Exercices | 306 |
| Chapitre 8. Courbes. Théorie locale | 310 |
| 8.0 Introduction | 311 |
| 8.1 Définitions | 312 |
| 8.2 Invariants affines : tangente, plan osculateur, concavité | 317 |
| 8.3 Longueur, l. a. paramétrisations d'une courbe d'un espace euclidien .. | 323 |
| 8.4 Courbure d'une courbe d'un espace euclidien | 326 |
| 8.5 Courbure algébrique d'une courbe plane orientée dans un plan orienté euclidien | 331 |
| 8.6 Torsion des courbes birégulières d'un espace euclidien de dimension 3 .. | 334 |
| 8.7 Exercices | 342 |

| | |
|--|------------|
| Chapitre 9. Courbes planes. Théorie globale | 352 |
| 9.1 Définitions | 353 |
| 9.2 Théorème de Jordan | 357 |
| 9.3 L'inégalité isopérimétrique | 363 |
| 9.4 Nombre d'enroulement d'une courbe plane | 366 |
| 9.5 Turning tangent theorem ou Umlaufsatz | 371 |
| 9.6 Convexité globale | 375 |
| 9.7 Théorème des quatre sommets | 379 |
| 9.8 La formule de Fabricius-Bjerre-Halpern | 382 |
| 9.9 Exercices | 390 |

| | |
|---|------------|
| Chapitre 10. Petit guide pour la théorie locale des surfaces de \mathbf{R}^3 | 393 |
| 10.1 Définitions | 394 |
| 10.2 Exemples | 395 |
| 10.3 Les deux formes fondamentales d'une surface | 416 |
| 10.4 Ce que l'on peut faire avec la première forme fondamentale (géométrie riemannienne en dimension 2) | 418 |
| 10.5 La courbure de Gauss | 429 |
| 10.6 La deuxième forme fondamentale et ce que l'on peut faire avec .. | 436 |
| 10.7 Relations entre les deux formes fondamentales d'une surface | 448 |
| 10.8 A propos des hypersurfaces de \mathbf{R}^{n+1} | 450 |

| | |
|--|------------|
| Chapitre 11. Petit guide pour la théorie globale des surfaces | 451 |
|--|------------|

| | |
|---|------------|
| PREMIÈRE PARTIE : VARIÉTÉS RIEMANNIENNES GLOBALES DE DIMENSION 2 | 453 |
|---|------------|

| | |
|--|-----|
| 11.1 Le problème global du plus court chemin | 453 |
| 11.2 Les surfaces à courbure constante | 455 |
| 11.3 Propriétés métriques : formules des variations première et seconde | 457 |
| 11.4 Unicité des plus courts chemins et rayon d'injectivité | 459 |
| 11.5 Variétés à $K \geq k$ | 462 |
| 11.6 Variétés à $K \leq k$ | 465 |
| 11.7 Formules de Gauss-Bonnet et de Hopf | 466 |
| 11.8 L'inégalité isopérimétrique sur les surfaces | 468 |
| 11.9 Les géodésiques périodiques et les inégalités isosystoliques | 469 |
| 11.10 Les surfaces à géodésiques toutes périodiques | 471 |
| 11.11 Transition entre les deux parties : problèmes de plongement et d'immersion | 472 |

| | |
|--|------------|
| DEUXIÈME PARTIE : SURFACES PLONGÉES OU IMMERGÉES DANS \mathbf{R}^3 | 474 |
|--|------------|

| | |
|---|-----|
| 11.12 Les surfaces à courbure nulle | 474 |
| 11.13 Les surfaces à courbure positive ou nulle | 475 |
| 11.14 Résultats d'unicité et de rigidité | 476 |
| 11.15 Les surfaces à $K < 0$ | 477 |

| | | |
|---------------------------------------|--|------------|
| 11.16 | Les surfaces à courbure moyenne nulle, <i>alias</i> surfaces minima | 478 |
| 11.17 | Les surfaces à courbure moyenne constante, <i>alias</i> bulles de savon | 480 |
| 11.18 | Les surfaces de Weingarten | 482 |
| 11.19 | Les surfaces comme enveloppes de plans : formulaire et applications . . | 484 |
| 11.20 | Les inégalités isopérimétriques pour les surfaces | 487 |
| 11.21 | Bouquet : propriétés caractéristiques de la sphère et des cyclides de Dupin | 487 |
| Bibliographie | | 493 |
| Index terminologique | | 499 |
| Index des notations | | 509 |