FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE-CHIMIE
INFORMATIQUE

PCSI-PC-PSI

Daniel Fredon | Alexis Brès
Bérangère Godde | Jean-Noël Beury

FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE-CHIMIE
INFORMATIQUE

PCSI-PC-PSI

8e édition

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083745-8

Table des matières

Informatique

Avant-propos

Ce formulaire s'adresse aux étudiants des classes préparatoires scientifiques de PCSI puis de PC, PSI.

Cette huitième édition corrigée est conforme aux nouveaux programmes 2021-2022.

Pour chaque paragraphe, vous trouverez :

− la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première ou de deuxième année ;

− parfois une indication PC ou PSI pour indiquer une notion spécifique au programme de telle ou telle filière.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, physique, chimie, informatique. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin de ce formulaire, un index vous permettra d'accéder rapidement à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir.

C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire, en quelque sorte un anxiolytique sans les effets secondaires. Mais vous risquez toutefois une certaine accoutumance : quand vous aurez commencé à vous en servir, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Bon travail et bon apprentissage !

Les auteurs

Les auteurs des parties de physique et chimie remercient Fabrice Dalier et Lucas Henry pour leur relecture et leurs conseils.

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Limites et continuité

❶ Continuité : définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

❶ Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

❶ Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1.2 Nombres réels et suites numériques

❶ Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leqslant b$, on a $[a, b] \subset X$.

❶ Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0$
$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

❶ Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la *même* limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

❶ Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

❶ Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.
Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.
Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

❶ Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors elles convergent vers l_1 et l_2. Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

❶ Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Somme des n premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\,\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = n\,\frac{u_1 + u_n}{2}\ .$$

❶ Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q\,u_n\ .$$

Terme général : $u_n = u_0\,q^n$.

Somme des n premiers termes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= u_0\,\frac{1-q^n}{1-q} && \text{si} \quad q \neq 1 \\ &= n\,u_0 && \text{si} \quad q = 1. \end{aligned}$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

❶ Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a\,u_n + b\ .$$

Si $a = 1$, elle est arithmétique de raison b.

Si $a \neq 1$, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.

❶ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.

L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0 \qquad (E)$.

❶ Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

• Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers $l \in I$ et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

• Cas f croissante

Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.

La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

• Théorème du point fixe

Si $f(I) \subset I$ et si f est contractante, alors l'équation $f(x) = x$ a une solution unique l dans I.

Toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

1.3 Dérivation

❶ Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

❶ Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \quad (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

❶ Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

f est strictement monotone sur I, dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

❶ Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

❶ Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

❶ Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leqslant K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leqslant K\,|x - x'|.$$

❶ Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.

❶ Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\,.$$

$x_1, \ldots, x_n \in I$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

❶ Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \Longleftrightarrow f'' \geqslant 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

$\forall x \in \mathbb{R} \ \ |\sin x| \leqslant |x|$.

1.4 Analyse asymptotique

❶ Relations de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

• **Définitions**

➢ On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A\,|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0.

Notation : $f = O(g)$ ou $f \preccurlyeq g$.

Si g ne s'annule pas sur J, cela signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur J.

➢ On dit que f est *négligeable* devant g, ou que g est prépondérant devant f, au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|$ pour tout x de J.

Notation : $f = o(g)$ ou $f \ll g$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

➢ On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0, si on a $f - g = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence. En particulier, si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

• Exemples fondamentaux

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll \mathrm{e}^{\gamma x} \quad \text{où} \quad \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,,\ \gamma > 0\,.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha \ll x^\beta \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \ \text{ et } \ \beta < 0\,.$$

• Propriétés des fonctions équivalentes

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

☞ *Lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.*

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

• Équivalents classiques

$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$;	$\sin x \underset{0}{\sim} x$;	$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$;	$\tan x \underset{0}{\sim} x$;	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

❶ Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n. Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

❶ Développements limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

1.5 Intégration

❶ Valeur absolue

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❶ Intégrales et ordre

- Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

❶ Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

❶ Intégration par parties

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)\,v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, et a et b des réels de I.

❶ Intégration par changement de variable

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

u de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f continue sur $[a, b]$.

❷ Fonction intégrable

$\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe	$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
$\displaystyle\int_a^{+\infty} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a,+\infty[$
$\displaystyle\int_a^{b} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a,b]$

❷ Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.
– Si g est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
– Si f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

• Domination

Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f.

• Équivalence

Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.

❷ Situations de référence

• Pour $a > 0$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a,+\infty[\iff \alpha > 1$.

• Pour $\alpha > 0$, $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

• $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0,a] \iff \alpha < 1$.

• $\ln x$ intégrable sur $]0,1]$.

❷ Théorème de convergence dominée

(f_n) fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur I.
(f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I,
il existe une fonction g continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur

I, telle que pour tout entier n, on ait $|f_n| \leqslant g$ (hypothèse de domination),
$\Longrightarrow$ les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n.$$

❷ Théorème d'intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\Longrightarrow$ f est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

❷ Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère I et J des intervalles de $\mathbb{R}$,
f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose :

• f continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,

• il existe une fonction φ, intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que, pour tout x de J, on ait $|f(x, .)| \leqslant \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in J \qquad \forall t \in I \qquad f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est définie et continue sur J.

❷ Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$, avec :

• f continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
• pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ intégrable sur I,
• $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue

par morceaux par rapport à la seconde,

• il existe une fonction φ intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x de J, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

1.6 Équations différentielles linéaires

❶ Équations différentielles linéaires du premier ordre

De la forme :

$$y' + a(x)\,y = b(x) \qquad \textbf{(1)}$$

équation homogène associée :

$$y' + a(x)\,y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Solution générale de (1)
= Solution générale y_S de (2)
+ Solution particulière de (1)

❶ Résolution de l'équation homogène (2)

Les solutions de l'équation **(2)** sont du type :

$$y_S(x) = K\,\mathrm{e}^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int_{t_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec K constante arbitraire et x_0 élément quelconque de I.

❶ Recherche d'une solution particulière de (1)

y_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ telle que $y(x) = K(x)\,y_1(x)$ soit solution de **(1)**.

Ceci conduit à $K'(x) = \dfrac{b(x)}{y_1(x)}$ et permet de calculer $K(x)$ puis $y(x)$.

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

❶ Équations du second ordre à coefficients constants

De la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Solution générale de (1)
= Solution générale y_S de (2)
+ Solution particulière de (1)

❶ Résolution de l'équation homogène (2)

- $\Delta > 0$ deux racines r_1 et r_2.

$$y_S(x) = K_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + K_2\,\mathrm{e}^{r_2 x}$$

- $\Delta = 0$ une racine double r_0.

$$y_S(x) = (K_1\,x + K_2)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$$

- $\Delta < 0$ deux racines $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

$$y_S(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,(K_1 \cos\beta x + K_2 \sin\beta x)$$

cas a, b, c réels.
équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$\Delta = a^2 - 4b$.

K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

❶ Recherche d'une solution particulière de (1)

- Cas où $f(x)$ est un polynôme $P(x)$ de degré n

Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré :

n si $b \neq 0$;
$n + 1$ si $b = 0$ et $a \neq 0$;
$n + 2$ si $a = b = 0$.

La recherche de cette solution se fait par identification.

- Cas où $f(x) = \mathrm{e}^{kx}\,P(x)$ avec P polynôme et k constante

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = \mathrm{e}^{kx}\,z(x)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant y, y' et y'' dans **(1)**, on est conduit à une équation en z du type précédent.

• Cas où $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos\beta x\, P(x)$ ou $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin\beta x\, P(x)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels

On cherche une solution particulière (à valeurs complexes) obtenue pour l'équation de second membre $\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,x} P(x)$.

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution ainsi obtenue.

❷ Équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \qquad \mathbf{(1)}.$$

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad \mathbf{(2)}.$$

La solution générale de **(1)** est la somme de la solution générale de **(2)** et d'une solution particulière de **(1)**.

Les solutions de **(2)** forment un espace vectoriel de dimension 2.

1.7 Espaces vectoriels normés

❷ Norme

Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$(1) \quad \forall x \in E \qquad N(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$$

$$(3) \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

❷ Normes équivalentes

Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E$:

$$\alpha\, N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta\, N_2(x).$$

Toute suite qui converge vers l pour une norme converge aussi vers l pour l'autre norme.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

❷ Voisinage

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V.

❷ Ouvert

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \qquad \exists\, r_a > 0 \qquad B(a, r_a) \subset A.$$

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a.

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

❷ Fermé

• Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

• a est un point adhérent à A si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient un point de A. L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence $\overline{A}$ de A. On a $A \subset \overline{A}$. Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E.

• Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite appartient à A.

• L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

❷ Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
C'est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A.

❷ Caractérisation séquentielle de la continuité

Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

❷ Caractérisation topologique de la continuité

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.

❷ Fonction lipschitzienne

• Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geqslant 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\, \|y - x\|.$$

Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

• Toute fonction lipschitzienne est continue.

❷ Théorème des bornes atteintes

Toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

1.8 Séries numériques

❶ Série : convergence

Une série $\sum u_n$ converge si la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Une suite (u_n) converge $\Longleftrightarrow$ la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

❶ Convergence absolue

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente ; mais la réciproque est fausse.

❶ Comparaison de deux séries à termes positifs

$\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ;

$\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.