

FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE-CHIMIE

INFORMATIQUE

PCSI-PC-PSI

Daniel Fredon | Alexis Brès
Bérangère Godde | Jean-Noël Beury

FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE-CHIMIE
INFORMATIQUE

PCSI-PC-PSI

8^e édition

DUNOD

l'intelligence

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083745-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	xiii
Mathématiques	1
1. Analyse	1
1.1 Limites et continuité	1
1.2 Nombres réels et suites numériques	1
1.3 Dérivation	4
1.4 Analyse asymptotique	6
1.5 Intégration	9
1.6 Équations différentielles linéaires	12
1.7 Espaces vectoriels normés	14
1.8 Séries numériques	16
1.9 Suites et séries de fonctions	18
1.10 Séries entières	20
1.11 Fonctions de plusieurs variables	22
2. Algèbre générale	25
2.1 Raisonnement et vocabulaire ensembliste	25
2.2 Applications	29
2.3 Ensembles de nombres usuels	31
2.4 Calculs algébriques	32
2.5 Fonctions circulaires et trigonométrie	33
2.6 Nombres complexes	35
2.7 Polynômes	40
3. Algèbre linéaire et multilinéaire	41
3.1 Systèmes linéaires	41
3.2 Espaces vectoriels	43
3.3 Applications linéaires	46

vi **Table des matières**

3.4 Matrices	49
3.5 Déterminants	52
3.6 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	53
3.7 Espaces préhilbertiens réels	55
3.8 Endomorphismes d'un espace euclidien	57

4. Calcul des probabilités 58

4.1 Dénombrement	58
4.2 Probabilités	60
4.3 Variables aléatoires	62

Physique

1. Étude du signal 69

1.1 Propagation du signal	69
1.2 Interférences et diffraction	71

2. Électronique 74

2.1 Circuits électriques	74
2.2 Circuits linéaires du premier ordre	78
2.3 Oscillateurs libres et forcés	79
2.4 Filtrage linéaire	81
2.5 L'amplificateur linéaire inégré	83
2.6 Stabilité des systèmes linéaires (PSI)	85
2.7 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction (PSI)	87
2.8 L'A.L.I. et la réaction positive (PSI)	89
2.9 Oscillateurs électroniques	91
2.10 L'échantillonnage	92
2.11 Introduction à la transmission des signaux	94

3. Optique 96

3.1 Optique géométrique	96
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (PC)	99
3.3 Déphasage et chemin optique (PC)	102
3.4 Les sources lumineuses (PC)	103
3.5 Les détecteurs de lumière	104
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses (PC)	106

3.7 Interféromètres (PC)	108
4. Mécanique	110
4.1 Cinématique d'un point	110
4.2 Dynamique du point	113
4.3 Étude énergétique du point	116
4.4 Dynamique de particules chargées	119
4.5 Moment cinétique du point	119
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	121
4.7 Cinématique et dynamique du solide	124
4.8 Référentiels non galiléens	127
5. Thermodynamique	132
5.1 Description d'un système à l'équilibre	132
5.2 Changement d'état d'un corps pur	133
5.3 Travail, transfert thermique, transformations	135
5.4 Premier et second principes	136
5.5 Machines thermiques	139
5.6 Systèmes ouverts en régime stationnaire	140
5.7 Diffusion de particules	142
5.8 Diffusion thermique	145
6. Mécanique des fluides	152
6.1 Statique des fluides	152
6.2 Description d'un fluide en mouvement	154
6.3 Actions de contact dans un fluide en mouvement	156
6.4 Équations de la dynamique des fluides	159
6.5 Bilans macroscopiques	160
7. Électromagnétisme	162
7.1 Action d'un champ magnétique	162
7.2 Induction, auto-induction et couplage	163
7.3 Conversion de puissance électromécanique	166
7.4 Conservation de la charge électrique	167
7.5 Distributions de charge et champ électrostatique	170
7.6 Propriétés du champ électrostatique	172
7.7 Champs électrostatiques de distributions particulières	175
7.8 Analogie pour le champ de gravitation	177
7.9 Dipôles électriques	178

viii **Table des matières**

7.10 Champs magnétostatiques	180
7.11 Dipôles magnétiques	184
7.12 Équations de Maxwell	186

8. Milieux ferromagnétiques (PSI) 188

8.1 Description	188
8.2 Circuits magnétiques	190

9. Conversions de puissances (PSI) 193

9.1 Conversion statique	193
9.2 Conversion électro-mécanique	196

10. Ondes 201

10.1 Ondes sur une corde	201
10.2 Ondes acoustiques	202
10.3 Propagation des champs électromagnétiques	205
10.4 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	206
10.5 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	207
10.6 Champ électromagnétique dans le plasma	209
10.7 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	210

11. Mécanique quantique 213

11.1 Premières notions	213
11.2 Physique du laser (PC)	215
11.3 Fonction d'onde (PC)	217
11.4 Particule libre (PC)	218
11.5 États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux (PC)	220

Chimie

**1. Transformations de la matière : Aspects
thermodynamiques** 223

1.1 Système physico-chimique	223
1.2 Transformation chimique d'un système	225

1.3 Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	228
1.4 Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	230
2. Transformations de la matière : Aspects cinétiques	236
2.1 Cinétique formelle	236
2.2 Mécanismes réactionnels	241
2.3 Cinétique en réacteur ouvert	244
3. Constitution de la matière	245
3.1 Structure des entités chimiques	245
3.2 Relations entre structure et propriétés physiques macroscopiques	249
3.3 Modélisation quantique et réactivité	253
3.4 Constitution et réactivité des complexes	258
4. État solide	263
4.1 Modèle du cristal parfait	263
4.2 Types de cristaux	265
5. Transformations chimiques en solutions aqueuses	267
5.1 Réactions acide-base	267
5.2 Réactions de précipitation	270
5.3 Réactions d'oxydo-réduction	271
6. Chimie organique	281
6.1 Description des molécules organiques	281
6.2 Polarimétrie et spectroscopie	286
6.3 Sélectivité	289
6.4 Mécanismes en chimie organique	289
6.5 Stratégie de synthèse	294
6.6 Activation des alcools, phénols et composés carbonylés	295
6.7 Activation des acides carboxyliques	301

6.8 Protection et déprotection de fonction	306
6.9 Oxydo-réduction en chimie organique	308
6.10 Création de liaisons carbone-carbone	312

Informatique

1. Programmation en Python	317
1.1 Type. Liste. Fonction	317
1.2 Représentation graphique	323
1.3 Terminaison. Correction. Complexité	323
1.4 Algorithmes. Recherche dans une liste. Recherche par dichotomie	325
1.5 Lecture et écriture de fichiers	326
1.6 Matrices de pixels et images	327
1.7 Pile. File	331
1.8 Récursivité	332
1.9 Tris	333
1.10 Algorithme glouton	337
1.11 Graphes	338
1.12 Recherche du plus court chemin	343
1.13 Programmation dynamique	347
1.14 Intelligence artificielle	349

2. Bases de données	356
----------------------------	------------

Annexe A : Formulaire de trigonométrie	363
1. Angles associés	363
2. Formules d'addition	363
3. Formules de duplication	363
4. Formules de linéarisation	364
5. Transformation de sommes en produits	364
6. Expressions en fonction de $t = \tan(a/2)$	364
7. Équations trigonométriques	364

Annexe B : Champs scalaires – champs vectoriels	365
1. Coordonnées cartésiennes	365
2. Propriétés	365
3. Coordonnées cylindriques	366
4. Coordonnées sphériques	367

Annexe C : Unités et constantes fondamentales	369
1. Unités du système international	369
2. Constantes fondamentales	370
3. Ordres de grandeur	371
Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques	373
1. Signal 1 : rampe	373
2. Signal 2 : triangle	373
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	373
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	373
5. Signal 5 : porte	374
6. Signal 6 : impulsion	374
Annexe E : Constantes chimiques	375
1. Constantes acido-basiques	375
2. Potentiels standards rédox	376
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	377
Annexe F : Classification périodique	379
Index des mathématiques	383
Index de la physique	387
Index de la chimie	395
Index de l'informatique	399

Avant-propos

Ce formulaire s'adresse aux étudiants des classes préparatoires scientifiques de PCSI puis de PC, PSI.

Cette huitième édition corrigée est conforme aux nouveaux programmes 2021-2022.

Pour chaque paragraphe, vous trouverez :

- la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première ou de deuxième année ;
- parfois une indication PC ou PSI pour indiquer une notion spécifique au programme de telle ou telle filière.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, physique, chimie, informatique. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin de ce formulaire, un index vous permettra d'accéder rapidement à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire, en quelque sorte un anxiolytique sans les effets secondaires. Mais vous risquez toutefois une certaine accoutumance : quand vous aurez commencé à vous en servir, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Bon travail et bon apprentissage !

Les auteurs

Les auteurs des parties de physique et chimie remercient Fabrice Dalier et Lucas Henry pour leur relecture et leurs conseils.

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Limites et continuité

① Continuité : définition

f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

① Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

① Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1.2 Nombres réels et suites numériques

① Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$.

2 [1] Mathématiques

1 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

1 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l , alors la suite (x_n) est convergente vers l .

1 Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n) .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

1 Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

1 Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ;

(v_n) est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leq v_n$ pour tout n , alors elles convergent vers l_1 et l_2 . Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Somme des n premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n u_k = n \frac{u_1 + u_n}{2}.$$

1 Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Terme général : $u_n = u_0 q^n$.

Somme des n premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$= n u_0 \quad \text{si } q = 1.$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

1 Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n + b.$$

Si $a = 1$, elle est arithmétique de raison b .

Si $a \neq 1$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a .

1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1 .

L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ (E).

4 [1] Mathématiques

1 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

• Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers $l \in I$ et si f est continue en l , alors $f(l) = l$.

• Cas f croissante

Si f est croissante sur I , alors la suite (u_n) est monotone.

La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

• Théorème du point fixe

Si $f(I) \subset I$ et si f est contractante, alors l'équation $f(x) = x$ a une solution unique l dans I .

Toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l .

1.3 Dérivation

1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0 . On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n ($n \neq 0$)	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

1 Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

f est strictement monotone sur I , dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

1 Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1 Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

1 Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

1 Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a , alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a .

6 [1] Mathématiques

1 Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

1 Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

1.4 Analyse asymptotique

1 Relations de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I , et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I , ou extrémité de I .

• Définitions

➤ On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leq A |g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0 .

Notation : $f = O(g)$ ou $f \leq g$.

Si g ne s'annule pas sur J , cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée sur J .

➤ On dit que f est *négligeable* devant g , ou que g est prépondérant devant f , au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour tout x de J .

Notation : $f = o(g)$ ou $f \ll g$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

➤ On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0 , si on a $f - g = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence. En particulier, si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

• **Exemples fondamentaux**

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x} \quad \text{où} \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha \ll x^\beta \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0.$$

• **Propriétés des fonctions équivalentes**

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

 Lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

• **Équivalents classiques**

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} ;$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

1 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n . Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

1 Développements limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

1.5 Intégration

① Valeur absolue

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

① Intégrales et ordre

- Si $a < b$, et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.
- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

① Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

① Intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t) v(t) \, dt \\ = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) \, dt. \end{aligned}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I , et a et b des réels de I .

① Intégration par changement de variable

$$\int_\alpha^\beta f(u(t)) u'(t) \, dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) \, dx.$$

u de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f continue sur $[a, b]$.

②

Fonction intégrable

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt \text{ converge}$$

$$f \text{ intégrable sur } [a, +\infty[$$

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge}$$

$$f \text{ intégrable sur } [a, b]$$

②

Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

- Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
- Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

• Domination

Si $f(x) = O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .

• Équivalence

Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

②

Situations de référence

- Pour $a > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a, +\infty[\iff \alpha > 1$.
- Pour $\alpha > 0$, $e^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.
- $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0, a[\iff \alpha < 1$.
- $\ln x$ intégrable sur $]0, 1]$.

②

Théorème de convergence dominée

(f_n) fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , continues par morceaux sur I .

(f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I ,

il existe une fonction g continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur

I , telle que pour tout entier n , on ait $|f_n| \leq g$ (hypothèse de domination),
 \implies les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

② Théorème d'intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\implies f$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

② Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère I et J des intervalles de \mathbb{R} ,

f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose :

- f continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction φ , intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que, pour tout x de J , on ait $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in J \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur J .

② Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $J \times I$, avec :

- f continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ intégrable sur I ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue

12 [1] Mathématiques

par morceaux par rapport à la seconde,

- il existe une fonction φ intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle que, pour tout x de J , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.

Alors la fonction g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

1.6 Équations différentielles linéaires

① Équations différentielles linéaires du premier ordre

De la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)

= Solution générale y_S de (2)

+ Solution particulière de (1)

① Résolution de l'équation homogène (2)

Les solutions de l'équation (2) sont du type :

$$y_S(x) = K e^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(u) du \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec K constante arbitraire et x_0 élément quelconque de I .

① Recherche d'une solution particulière de (1)

y_1 étant une solution non nulle de (2), on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(x)$ telle que $y(x) = K(x)y_1(x)$ soit solution de (1).

Ceci conduit à $K'(x) = \frac{b(x)}{y_1(x)}$ et permet de calculer $K(x)$ puis $y(x)$.

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

① Équations du second ordre à coefficients constants

De la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)

= Solution générale y_S de (2)

+ Solution particulière de (1)

① Résolution de l'équation homogène (2)

- $\Delta > 0$ deux racines r_1 et r_2 .

$$y_S(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

- $\Delta = 0$ une racine double r_0 .

$$y_S(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x}$$

- $\Delta < 0$ deux racines $\alpha \pm i\beta$.

$$y_S(x) = e^{\alpha x} (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x)$$

cas a, b, c réels.

équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

① Recherche d'une solution particulière de (1)

- Cas où $f(x)$ est un polynôme $P(x)$ de degré n

Il existe une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré :

$$n \quad \text{si } b \neq 0;$$

$$n + 1 \quad \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0;$$

$$n + 2 \quad \text{si } a = b = 0.$$

La recherche de cette solution se fait par identification.

- Cas où $f(x) = e^{kx} P(x)$ avec P polynôme et k constante

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^{kx} z(x)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant y, y' et y'' dans (1), on est conduit à une équation en z du type précédent.

14 [1] Mathématiques

- Cas où $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x P(x)$ ou $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x P(x)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels

On cherche une solution particulière (à valeurs complexes) obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)x} P(x)$.

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution ainsi obtenue.

② Équation différentielle linéaire

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (1).$$

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (2).$$

La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de (2) et d'une solution particulière de (1).

Les solutions de (2) forment un espace vectoriel de dimension 2.

1.7 Espaces vectoriels normés

② Norme

Une norme sur E est une application N de E dans \mathbb{R} qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0$
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- (3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

② Normes équivalentes

Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E$:

$$\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

Toute suite qui converge vers l pour une norme converge aussi vers l pour l'autre norme.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

② Voisinage

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V .

2

Ouvert

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B(a, r_a) \subset A.$$

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a .

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A . On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

2

Fermé

• Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

• a est un point adhérent à A si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient un point de A . L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence \overline{A} de A . On a $A \subset \overline{A}$. Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E .

• Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E , la limite appartient à A .

• L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

2

Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

C'est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A .

2

Caractérisation séquentielle de la continuité

Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

2

Caractérisation topologique de la continuité

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E .

② Fonction lipschitzienne

- Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$

Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

- Toute fonction lipschitzienne est continue.

② Théorème des bornes atteintes

Toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

1.8 Séries numériques

① Série : convergence

Une série $\sum u_n$ converge si la suite

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ converge.}$$

Une suite (u_n) converge \iff la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

① Convergence absolue

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente ; mais la réciproque est fautive.

① Comparaison de deux séries à termes positifs

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge ;}$$

$$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge.}$$

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.