Clément Gosselin

Fondamentaux de la robotique

Géométrie, cinématique, dynamique et commande

DUNOD

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085499-8

Dédicace

Ce livre est dédié à mon épouse Annette et à mes filles Marie-Joëlle et Alexandrine.

Avant-propos

Ce livre rassemble les éléments essentiels pour la modélisation géométrique, cinématique et dynamique des systèmes robotiques articulés. Le dernier chapitre aborde également la commande de ces systèmes. Bien que la robotique regroupe plusieurs disciplines et recouvre aujourd'hui un grand nombre de concepts, il demeure qu'à la base, un robot est un système mécanique et que la compréhension de son fonctionnement implique nécessairement des notions de mécanique. Ainsi, ce livre a pour objectif de procurer à l'ingénieur roboticien les outils nécessaires pour analyser, utiliser et concevoir des systèmes robotiques. L'emphase est placée sur la généralité des concepts et leur applicabilité à toutes les formes de dispositifs robotiques. Par exemple, au chapitre 3, la résolution du problème géométrique inverse est traitée de façon générale, de sorte que les algorithmes fournis puissent être appliqués à n'importe quelle architecture de robot. De plus, on n'aborde pas les langages de programmation des robots, qui sont spécifiques à chaque produit commercial, mais on développe plutôt des outils qui permettent ensuite à l'ingénieur de travailler de façon autonome, peu importe le matériel utilisé. Il en va de même pour la modélisation dynamique, qui est basée sur une approche très générale pour la mise en place des équations du mouvement. Le livre convient donc parfaitement aux élèves ingénieurs qui ont un parcours en génie mécanique mais il est aussi tout à fait approprié pour des parcours en génie électrique ou informatique. En effet, le traitement est abordable pour des élèves fréquentant ces programmes et il leur permettra de généraliser leurs connaissances en robotique.

Ce livre est issu du matériel pédagogique que j'ai développé à l'université Laval dans le cadre du cours *Éléments de robotique* que j'enseigne depuis 1990. La plupart des exemples et exercices sont des problèmes qui ont été solutionnés en classe, soumis comme devoirs ou encore des anciennes questions d'examen. Les exemples et exercices couvrent donc un spectre large d'applications de la théorie. Certains exemples proviennent de projets de recherche en robotique. En se basant sur les solutions détaillées des exemples présentés, le lecteur devrait pouvoir aisément compléter les exercices donnés à la fin de chaque chapitre. Ces exercices font partie intégrante de l'ouvrage et sont importants pour la consolidation de la maîtrise des concepts exposés.

Le logiciel de mise en page LaTeX a été utilisé pour la rédaction de ce livre. Les figures schématiques ont pour la plupart été créées à l'aide des logiciels XFig, IPE et Inkscape. Les figures qui incluent des représentations solides de systèmes robotiques ont été créées avec le logiciel de CAO CREO. Les graphes ont été générés à l'aide de Matlab.

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers plusieurs personnes qui ont contribué de près ou de loin à la rédaction de ce livre. Au fil des ans, plusieurs étudiants ou chercheurs du laboratoire de robotique de l'université Laval ont contribué à la création de plusieurs des figures dont Simon Foucault, Pierre-Luc Richard, Thierry Laliberté, Ian Tremblay, Alexandre Drouin et Dan Zhang. Par ailleurs, j'aimerais remercier particulièrement Boris Mayer St-Onge pour la formalisation de la solution polynomiale du problème géométrique inverse des robots sériels non découplables ainsi que pour ses multiples autres contributions et son aide avec LaTeX. De plus, de nombreux étudiants et étudiantes ont fourni des commentaires qui ont contribué à améliorer le document. Finalement, les prototypes décrits dans le chapitre d'introduction ont été mis au point par des membres du laboratoire de robotique de l'université Laval incluant Thierry Laliberté, Simon Foucault, Louis-Thomas Schreiber, Kefei Wen, Tan-Sy Nguyen, David Harton, Simon Rocheleau, Mathieu Goulet, Mathieu Baril, Samuel Bouchard, Moritz Arns et Eric Barnett. J'aimerais également remercier le professeur Jorge Angeles de l'université McGill, qui m'a enseigné une approche rigoureuse de la cinématique qui se reflète dans plusieurs sections de ce livre et le professeur Lionel Birglen de Polytechnique Montréal pour m'avoir encouragé à publier cet ouvrage.

Clément Gosselin, Québec, le 28 avril 2023

Présentation de l'auteur

Clément Gosselin a obtenu le diplôme de baccalauréat en génie mécanique de l'université de Sherbrooke (Québec) en 1985 et il a reçu la médaille d'or du gouverneur général du Canada pour ses études de premier cycle. Il a ensuite obtenu un doctorat en génie mécanique (robotique) de l'université McGill (Québec) en 1988 où il a reçu le *D.W. Ambridge Award* pour la meilleure thèse de doctorat de l'année en sciences physiques et génie. Après un stage post-doctoral à l'INRIA (Sophia-Antipolis), il a débuté en 1989 une carrière de professeur à l'université Laval (Québec) où il a fondé le laboratoire de robotique. Il est professeur titulaire (équivalent au titre de professeur des universités en France) depuis 1997. De 2001 à 2021, il a occupé la chaire de recherche du Canada en robotique et mécatronique à l'université Laval. Il a aussi été chercheur visiteur à RWTH à Aix-la-Chapelle (Allemagne) en 1995, professeur visiteur à l'université de Victoria (Canada) en 1996 et professeur visiteur à l'IRCCyN (Nantes) en 1999. Il enseigne la robotique à l'université Laval depuis 1990.

Ses principaux intérêts de recherche sont la cinématique, la dynamique et la commande des systèmes robotiques avec une emphase particulière sur la mécanique de la préhension, la cinématique et la dynamique des robots parallèles ainsi que le développement de robots collaboratifs et de dispositifs haptiques. Ses travaux dans ces différents domaines ont fait l'objet de nombreuses publications dans des revues savantes et des actes de conférences de calibre international ainsi que de nombreux brevets. Ses publications ont été citées plus de 39 000 fois dans la littérature. Il a dirigé plusieurs initiatives de recherche, incluant des collaborations avec des entreprises de haute technologie et il a dirigé les études supérieures de plus de 140 étudiants (mémoires de maîtrise et thèses de doctorat). Il est actuellement éditeur associé du journal *Mechatronics* et éditeur du journal *IEEE Robotics and Automation Letters*.

Clément Gosselin a reçu plusieurs distinctions, incluant le *ASME DED Mechanisms and Robotics Committee Award* en 2008, le *ASME Machine Design Award* en 2013, le *IFToMM Award of Merit* en 2019 et le Grand Prix d'excellence professionnelle de l'Ordre des ingénieurs du Québec en 2023. Il a été fait Officier de l'Ordre du Canada en 2010 pour ses contributions à la recherche sur les robots parallèles et les systèmes sous-actionnés. Il est également Fellow de l'ASME, de l'IEEE et de la Société royale du Canada.

Table des matières

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Si je n'arrivais pas à faire cette chose si élémentaire, je ne serais d'aucune utilité.
Michel Jean, *Kukum*, Libre Expression, 2019

1.1 Robot et robotique

Dans l'esprit de la plupart des gens, le mot robot évoque des machines à l'allure anthropomorphe et dotées de fonctionnalités qui s'approchent ou dépassent même celles des humains. Cette conception est soutenue par une profusion d'œuvres littéraires et cinématographiques racontant tantôt les mérites, tantôt les déboires, de robots imaginaires. En fait, la source du mot robot est une pièce de théâtre créée en 1920 par l'auteur tchèque Karel Čapek (le mot tchèque *robota* signifie travail ou corvée). Pour les ingénieurs roboticiens cependant, il importe plutôt de considérer les connaissances scientifiques et techniques qui sont nécessaires au développement des robots. En effet, bien que les robots humanoïdes soient maintenant une réalité, les robots fabriqués et utilisés de nos jours sont pour la plupart très différents des androïdes que l'on retrouve dans les œuvres de science-fiction, et ce, autant au niveau de leur aspect extérieur qu'au niveau de leurs performances. Ainsi, nous adopterons ici une définition d'un robot qui est fondée sur les aspects physiques et technologiques. Dans ce contexte, le dictionnaire nous propose la définition suivante :

- *Robot* : Appareil automatique capable de manipuler des objets ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe, modifiable ou adaptable.

Cette définition inclut la notion de mouvement, la notion de programmation et la notion d'adaptabilité, qui sont trois aspects fondamentaux des robots. En effet, les robots sont des machines capables d'imprimer un mouvement à des objets (manipulation) selon des trajectoires programmables. L'aspect programmation distingue les robots des machines fixes, dont le mouvement ne peut être modifié que par des changements matériels qui nécessitent des modifications physiques du dispositif. Enfin, l'adaptation, grâce à des capteurs, permet au robot de tenir compte de façon plus ou moins élaborée des changements dans son environnement immédiat. Cette dernière fonctionnalité fait l'objet de nombreux travaux récents, visant à rendre les robots de plus en plus autonomes dans des environnements non structurés. Le développement des robots a donné naissance à une science, la *robotique*, que l'on peut définir comme la *science et technique de la robotisation, de la conception et de la construction des robots*.

La définition présentée ci-dessus permet de constater que la robotique est une science multidisciplinaire qui fait intervenir plusieurs domaines du génie comme la mécanique, l'électronique, la commande, l'informatique, la science des données et l'intelligence artificielle. Dans cet ouvrage, nous nous intéressons aux fondements de la robotique, qui sont principalement mécaniques. En effet, avant même de vouloir commander ou programmer un robot, il faut en comprendre la géométrie, la cinématique et la dynamique. Ces fondements sont essentiels et un des buts de cet ouvrage est de permettre à l'ingénieur de développer une autonomie dans la modélisation et l'analyse des robots, peu importe leur architecture mécanique. Une fois ces notions bien maîtrisées, tous les autres aspects peuvent être abordés et reposeront alors sur des bases solides.

1.2 Évolution et diversité de la robotique

On considère généralement que la robotique industrielle est née au début des années 1960 avec l'installation d'un robot UNIMATE dans une usine de la compagnie General Motors aux États-Unis en 1961. Toutefois, l'idée de construire des robots est beaucoup plus ancienne. Même dans l'ère industrielle, on peut identifier plusieurs initiatives en ce sens qui précèdent le robot de UNIMATION. À titre d'exemple, le brevet de W.L.V. Pollard [1], publié en 1942, qui propose un robot spatial d'architecture parallèle, est présenté schématiquement à la figure 1.1.

Le paysage de la robotique industrielle est depuis longtemps dominé par les

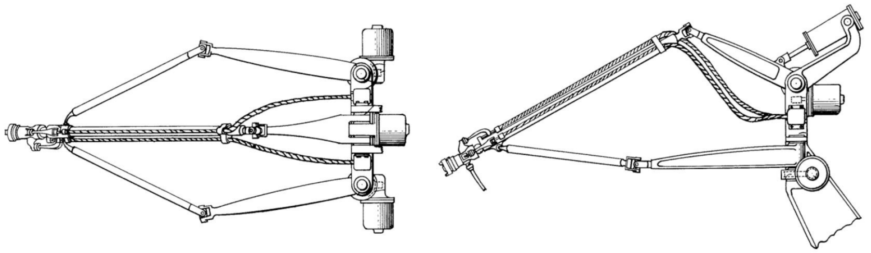

Figure 1.1. Robot parallèle spatial breveté par W.L.V. Pollard en 1942.

robots d'architecture sérielle, c'est-à-dire des bras manipulateurs construits selon une chaîne cinématique unique constituée d'une série d'articulations reliées par des membrures. Un exemple de robot construit selon cette architecture est montré à la figure 1.2. Étant donné l'importance de ce type de robot, il occupera une place prépondérante dans cet ouvrage. On s'intéressera entre autres aux problèmes fondamentaux de géométrie, de cinématique, de dynamique et de commande reliés à ce type d'architecture qui est présent partout dans l'industrie.

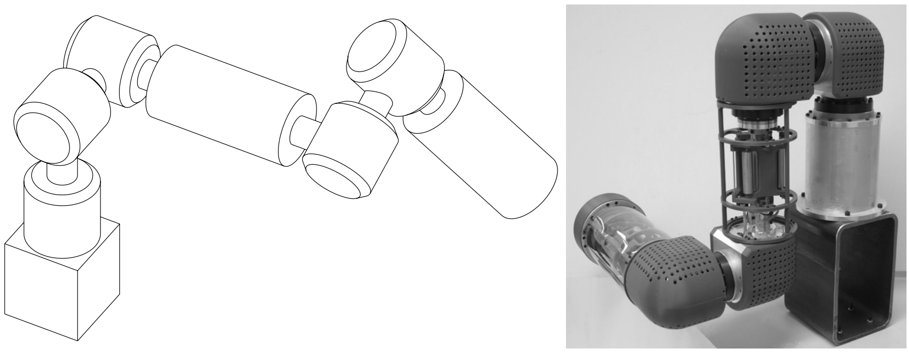

Figure 1.2. Robot sériel à 5 degrés de liberté développé au laboratoire de robotique de l'université Laval pour l'interaction physique humain-robot [2].

Bien que les robots sériels soient très répandus, il existe plusieurs autres systèmes robotiques que l'ingénieur roboticien doit pouvoir modéliser, concevoir ou commander. Par exemple, les robots d'architecture parallèle sont aussi utilisés dans plusieurs applications, particulièrement celles qui nécessitent la manipulation de charges lourdes ou la production de mouvements impliquant des accélérations très élevées. Un exemple d'application des robots parallèles est l'industrie alimentaire, où ces robots peuvent travailler à des cadences très élevées. Ainsi, on consacrera un chapitre de cet ouvrage à l'étude de ce type de robot, dont les caractéristiques diffèrent considérablement de celles des robots sériels. Contrairement aux robots sériels, les robots parallèles comportent plusieurs chaînes cinématiques reliant la base à l'effecteur, ce qui permet de déporter les actionneurs vers la base. Des exemples de robots parallèles sont illustrés à la figure 1.3.

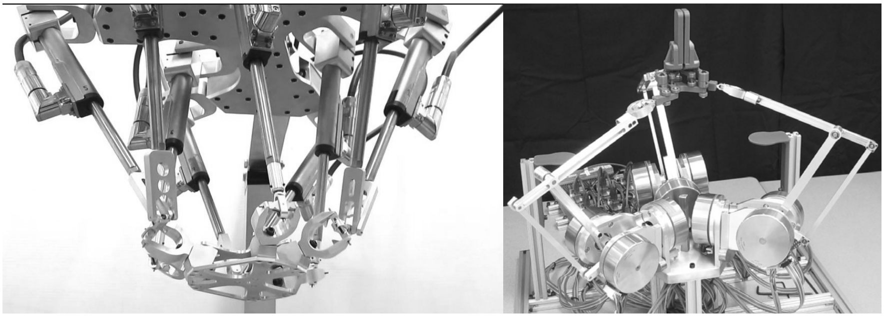

FIGURE 1.3. Robots parallèles redondants à (6 + 3) degrés de liberté développés au laboratoire de robotique de l'université Laval, voir [3] et [4].

Les notions fondamentales présentées dans cet ouvrage permettront également à l'ingénieur roboticien de modéliser des systèmes plus complexes. En effet, la robotique moderne se déploie sous de multiples formes, mais celles-ci reposent toutes sur les concepts mécaniques présentés dans cet ouvrage. On peut penser entre autres aux robots marcheurs tels que ceux montrés à la figure 1.4. Dans ce type de robot, les pattes possèdent l'architecture de robots sériels articulés qui doivent être commmandés pour effectuer des trajectoires correspondant au patron de marche du robot.

FIGURE 1.4. Robots marcheurs à 6 pattes développés au laboratoire de robotique de l'université Laval, voir [5] et [6].

Un autre exemple de système robotique avancé est le concept de main ou préhenseur robotique, qui permet à un robot de saisir des objets de forme variée de façon plus ou moins autonome. Deux exemples de ce type de préhenseur sont montrés à la figure 1.5. Dans ce cas, les doigts de la main peuvent être considérés comme des robots sériels faisant contact avec l'objet saisi non seulement à leur effecteur mais en plusieurs points de contact le long des membrures intermédiaires.

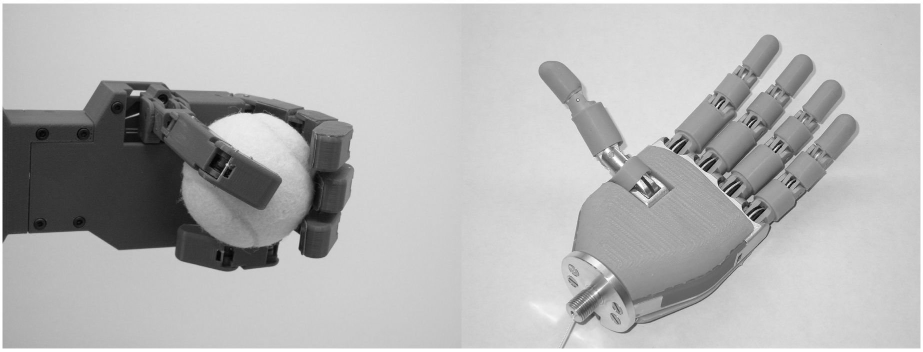

FIGURE 1.5. Mains robotiques développées au laboratoire de robotique de l'université Laval, voir [7] et [8].

Les robots parallèles entraînés par câbles constituent aussi des exemples de systèmes robotiques particuliers. Leur modélisation est semblable à celle des robots parallèles conventionnels traités dans ce livre. La particularité des robots entraînés par câbles est que les câbles peuvent fonctionner seulement en tension (et non en compression), ce qui impose des contraintes particulières. Un exemple de robot parallèle entraîné par câbles est donné figure 1.6.

Certains dispositifs robotiques sont aussi conçus pour interagir physiquement avec leur environnement ou avec des humains. Ce paradigme est de plus en plus présent dans les applications robotiques et implique aussi une modélisation reposant sur les concepts présentés dans ce livre. Un exemple d'interface haptique servant à émuler une poignée de main est montré à la figure 1.7.

Comme on peut le constater avec les exemples mentionnés ci-dessus, les systèmes robotiques prennent des formes variées. De plus, ils sont déployés dans un nombre grandissant d'applications qui peuvent représenter des conditions d'utilisation très différentes les unes des autres. Cependant, tous ces systèmes ont comme dénominateur commun qu'ils impliquent le mouvement de corps physiques articulés par des liaisons mécaniques. Ainsi, les notions fondamentales liées à la géométrie, la cinématique, la dynamique et la commande des systèmes articulés constituent un noyau de connaissances que l'ingénieur roboticien doit s'appliquer à maîtriser, ce qui est le but de cet ouvrage.

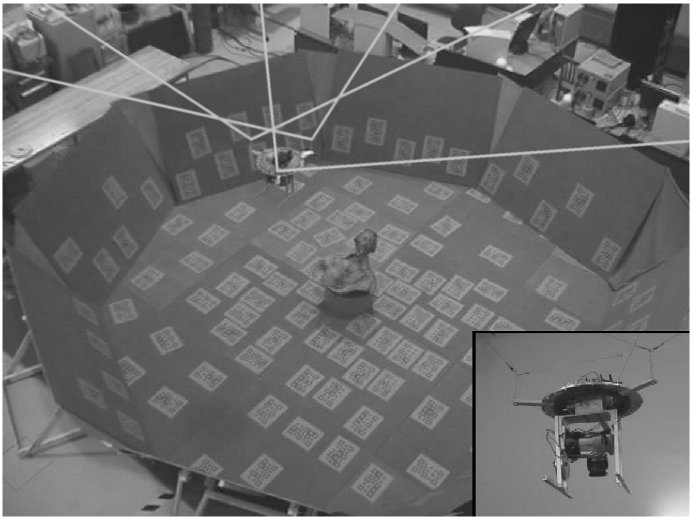

FIGURE 1.6. Robot parallèle entraîné par câbles développé au laboratoire de robotique de l'université Laval [9].

1.3 Plan de l'ouvrage

Tel que mentionné plus haut, la robotique est une science multidisciplinaire. Cependant, dans cet ouvrage, nous traiterons principalement de ses aspects mécaniques, puisqu'ils constituent le cœur des systèmes robotiques.

Le chapitre 2 présente quelques rappels des notions de base de mathématiques et de cinématique nécessaires à l'étude de la mécanique des robots. Les outils mathématiques principaux qui sont utilisés dans la modélisation des robots sont l'algèbre linéaire et le calcul matriciel. À l'aide de ces outils, le chapitre 2 aborde ensuite l'étude des rotations des corps rigides dans l'espace et les formalismes utilisés pour les représenter. En effet, les rotations sont un élément fondamental de l'étude de la cinématique des robots et un traitement rigoureux de celles-ci est indispensable. De plus, des méthodes pratiques pour le traitement des rotations sont présentées afin d'outiller l'ingénieur roboticien pour la résolution de problèmes pratiques. On ne peut trop insister sur l'importance du traitement des rotations. À titre d'exemple, le mécanisme de l'*œil agile* est montré à la figure 1.8. Ce robot parallèle sphérique à trois degrés de liberté permet l'orientation d'une caméra avec des performances de vitesses et d'accélération qui dépassent celles de l'œil humain.

Une fois les notions mathématiques et le traitement des rotations mis en place, le chapitre 3 aborde la modélisation géométrique et cinématique des robot sériels. Étant donné l'importance de ce type d'architecture dans la ro-

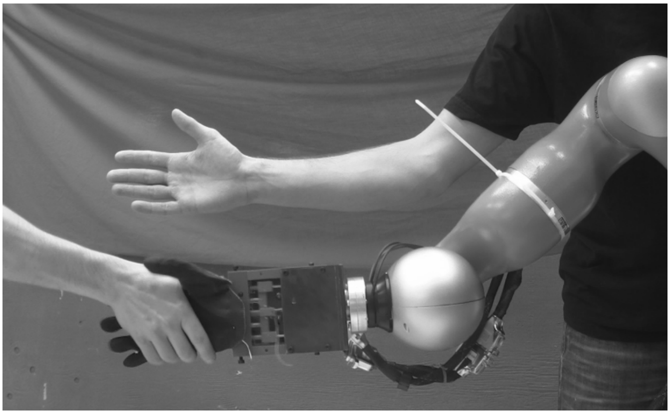

FIGURE 1.7. Dispositif robotique développé au laboratoire de robotique de l'université Laval pour émuler une poignée de main [10].

botique industrielle, on lui consacre une part substantielle de cet ouvrage. En effet, le chapitre 3 constitue en quelque sorte le cœur du livre. On y traite la modélisation géométrique, la résolution des problèmes géométriques direct et inverse ainsi que le développement des matrices jacobiennes. La résolution des problèmes de statique et la notion de sensibilité cinématique sont aussi présentées. Les différentes architectures de robots sériels sont présentées et analysées.

Le chapitre 4 introduit ensuite les manipulateurs parallèles. Les problèmes géométriques direct et inverse y sont traités ainsi que le développement des matrices jacobiennes. Étant donné la grande diversité des architectures parallèles retrouvées dans la littérature, il n'est pas possible de présenter un traitement exhaustif du sujet. Ainsi, seulement quelques architectures planes et spatiales sont traitées, celles-ci constituant un échantillon qui permet de mettre en évidence les techniques utilisées pour la résolution des problèmes. Un des éléments importants est la présentation des matrices jacobiennes et des singularités, dont la nature diffère de celle des singularités des robots sériels.

Le chapitre 5 porte sur la planification de trajectoire en robotique. Deux problèmes principaux y sont abordés soit la planification de trajectoire dans l'espace articulaire et la planification cartésienne. On y présente différentes techniques qui permettent de lisser les trajectoires tout en satisfaisant des contraintes imposées pour assurer différents niveaux de continuité. Par ailleurs, des outils mathématiques sont introduits pour la modélisation de trajectoires cartésiennes.

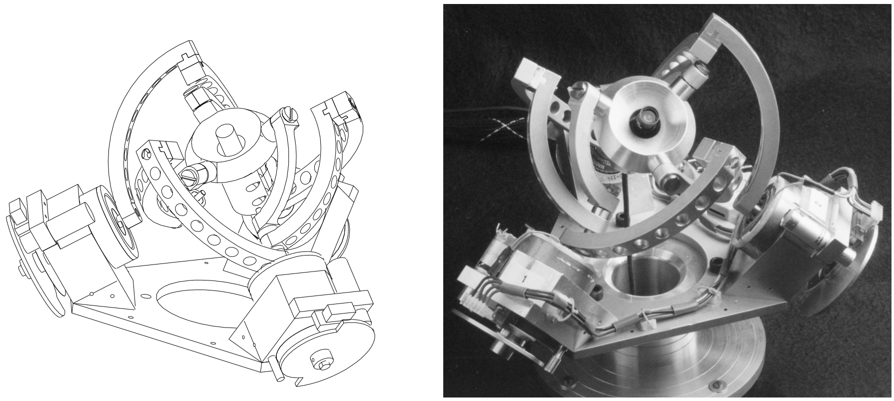

FIGURE 1.8. L'œil agile, un robot parallèle sphérique à trois degrés de liberté développé au laboratoire de robotique de l'université Laval pour l'orientation rapide d'une caméra [11].

La modélisation dynamique des manipulateurs sériels fait l'objet du chapitre 6. On y introduit d'abord la méthode de Lagrange pour la dérivation des équations de mouvement d'un système mécanique car cette méthode est particulièrement appropriée pour la modélisation des robots sériels. Ensuite, la méthode de Lagrange est développée de façon spécifique pour les manipulateurs d'architecture sérielle. Une formulation cohérente et compacte des équations est présentée. De plus, des méthodes simples et efficaces sont présentées afin de permettre une grande autonomie dans la dérivation des modèles, sans avoir à faire appel à des formules toutes faites.

Finalement, le chapitre 7 traite brièvement de la commande des manipulateurs. Quelques rappels sur la commande par rétroaction sont d'abord présentés. Ensuite, les algorithmes de base pour la commande en position d'un robot sériel sont présentés. La commande par rétroaction simple est développée puis la commande par linéarisation et asservissement, faisant appel au modèle dynamique développé au chapitre précédent est présentée. Comme pour les autres chapitres, des outils pratiques sont proposés afin d'outiller l'ingénieur pour la résolution de problèmes concrets.

Les notions développées dans cet ouvrage ont été choisies pour leur pertinence en robotique ainsi que pour leur facilité d'utilisation. Ainsi, le traitement des rotations présenté au chapitre 2 est inspiré entre autres de [12] auquel certains outils pratiques ont été ajoutés et plusieurs concepts avancés ont été omis. La modélisation géométrique et cinématique des robots sériels présentée au chapitre 3 est quant à elle partiellement inspirée de la présentation faite dans [13], en particulier pour la résolution du problème géométrique inverse.

Le chapitre 4 présente des architectures parallèles classiques comme celles retrouvées par exemple dans [14] ou [15] mais en développe aussi quelques autres, dont l'intérêt est surtout académique. Les notions présentées au chapitre 5 sont inspirées des techniques présentées par exemple dans [16]. La dérivation des équations de Lagrange présentée au chapitre 6 est inspirée de [17] et la forme des équations de Lagrange spécifique aux robots sériels peut être trouvée par exemple dans [18]. Enfin, la présentation des équations du chapitre 7 est inspirée de [16]. Dans un but d'uniformiser le traitement, les formulations trouvées dans les références citées ici ont été adaptées ou modifiées sans en altérer la signification.

CHAPITRE 2

RAPPELS DE MATHÉMATIQUES ET DE CINÉMATIQUE

Ce n'est pas la girouette qui tourne, c'est le vent.
Edgar Faure

2.1 Introduction

Ce chapitre vise à mettre en place les notions de base qui sont essentielles à l'étude de la robotique. Les outils mathématiques présentés font appel à l'algèbre linéaire et vectorielle. Le traitement des rotations constitue un élément clé de l'analyse des systèmes mécaniques comme les robots et par conséquent on leur consacrera une bonne partie du chapitre. L'outil privilégié pour la représentation des rotations est la matrice de rotation, qui servira également à effectuer les changements de repère des vecteurs et des matrices. L'approche présentée est systématique et elle permettra de traiter toute situation dans laquelle des rotations quelconques sont impliquées. En effet, la généralité du traitement des rotations dans l'espace tridimensionnel est essentielle afin de pouvoir résoudre les problèmes liés à l'utilisation des robots. Le formalisme des angles d'Euler sera aussi présenté, étant donné son utilisation très répandue dans la littérature sur la robotique ainsi que dans l'industrie. Bien qu'elles soient d'une importance moindre, les réflexions et les projections seront aussi traitées, afin de compléter l'étude des transformations linéaires.

L'une des difficultés du traitement des rotations en cinématique est que le vecteur de vitesse angulaire, qui représente le mouvement instantané associé à une rotation, n'est pas directement intégrable. Il est donc important d'aborder l'étude des mouvements instantanés de rotation. À cette fin, le vecteur de vitesse angulaire sera formellement défini à l'aide de la dérivation par rapport au temps de la matrice de rotation et le lien entre ce vecteur et les dérivées temporelles des angles d'Euler sera établi. Enfin, on s'intéressera à la détermination du degré de liberté des chaînes cinématiques, ce qui constitue une autre notion essentielle en robotique.

2.2 Notation

Avant d'aborder les sujets qui font l'objet de cet ouvrage, il convient d'établir avec rigueur la notation utilisée. Dans ce document, les scalaires seront représentés par des lettres en caractères normaux. À l'occasion, des caractères normaux, majuscules, pourront aussi désigner des entités géométriques comme des points ou des droites. Le contexte établira clairement ces cas. Par ailleurs, les vecteurs seront représentés par des lettres minuscules en caractères gras, alors que les matrices seront représentées par des lettres majuscules, aussi en caractères gras. Les symboles en caractères calligraphiques seront, pour leur part, réservés aux repères.

À titre d'exemple, la position d'une particule dans un repère cartésien fixe $\mathcal{R}$ pourrait être désignée par le vecteur $\mathbf{p}$ et sa vitesse par le vecteur $\mathbf{v}$. Le module de sa vitesse pourrait être désigné par v, un scalaire. Un repère cartésien mobile $\mathcal{R}'$ en rotation par rapport au repère $\mathcal{R}$ pourrait être relié à celui-ci par une matrice de rotation $\mathbf{Q}$.

Mentionnons également que les vecteurs utilisés ici ne seront pas limités à ceux contenus dans l'espace euclidien tridimensionnel. Des vecteurs de dimensions supérieures seront parfois rencontrés. Il en va de même pour les matrices.

2.3 Rappels mathématiques

Les systèmes robotiques sont, par essence, des systèmes multidimensionnels. Leur modélisation nécessite donc l'utilisation du calcul matriciel et de quelques notions élémentaires d'algèbre linéaire. Il convient donc de faire quelques brefs rappels qui s'avèreront utiles dans les chapitres subséquents.

2.3.1 Algèbre vectorielle et matricielle

Les vecteurs et les matrices obéissent à des règles algébriques strictes et bien définies. Celles-ci sont supposées connues du lecteur mais sont reprises brièvement ici afin de bien fixer les idées.

Par convention, les vecteurs seront toujours définis comme des vecteurs colonne. Par exemple, un vecteur $\mathbf{v}$ défini dans l'espace tridimensionnel s'écrit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

où v_i est la i-ième composante de $\mathbf{v}$. De plus, on définit la *transposée* d'un vecteur ou d'une matrice comme une matrice dont les colonnes sont égales aux lignes de la matrice (ou du vecteur) de départ. On désigne la transposée d'une matrice $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}^T$. Par exemple, soit $\mathbf{A}$ une matrice de dimension 2×3 qui s'écrit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

où les a_{ij} sont appelés les *éléments* de la matrice. On a alors

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Dans le cas d'un vecteur, la transposée du vecteur devient simplement un vecteur ligne. Pour l'exemple donné ci-dessus, on aurait

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Dans le même ordre d'idées, on définit une matrice *symétrique* comme une matrice qui est égale à sa transposée. En d'autres mots, une matrice $\mathbf{D}$ est symétrique si et seulement si on a

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T. \tag{2.5}$$

Une matrice symétrique est donc nécessairement carrée. La condition pour la symétrie peut aussi s'exprimer en fonction des éléments d_{ij} de la matrice sous la forme

$$d_{ij} = d_{ji}, \quad \text{pour} \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{2.6}$$

où n est la dimension de la matrice.

Les opérations algébriques élémentaires s'obtiennent facilement pour les matrices et les vecteurs. La *somme* ou *différence* de deux vecteurs ou matrices est obtenue en additionnant (ou en soustrayant) les éléments correspondants des deux vecteurs ou matrices. Cette opération n'est évidemment définie que pour des vecteurs ou matrices ayant les mêmes dimensions. Par exemple, si on définit un vecteur $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

alors on aura

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Le *produit* d'un scalaire par une matrice ou un vecteur s'obtient simplement en faisant le produit de ce scalaire par chacune des composantes du vecteur ou de la matrice. Par exemple, soit b un scalaire. On aura alors, en reprenant les exemples donnés ci-dessus

$$b\mathbf{v}=\begin{bmatrix} bv_1 \\ bv_2 \\ bv_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ba_{11} & ba_{12} & ba_{13} \\ ba_{21} & ba_{22} & ba_{23} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Par ailleurs, le *produit matriciel* ou produit de deux matrices ou vecteurs est défini comme suit : soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices dont on désire faire le produit et soit $\mathbf{C}$ ce produit. La matrice $\mathbf{C}$ est la matrice dont les éléments c_{ij} sont donnés par

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{2.10}$$

où n est le nombre de colonnes dans la matrice $\mathbf{A}$ et le nombre de lignes dans la matrice $\mathbf{B}$. En effet, le nombre de colonnes dans la matrice $\mathbf{A}$ doit être égal au nombre de lignes dans la matrice $\mathbf{B}$ pour que le produit matriciel de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{B}$ soit défini. En reprenant à nouveau les exemples utilisés plus haut et en définissant une matrice $\mathbf{B}$ telle que

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

on peut alors écrire

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

et

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}) & (b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}) & (b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}) \\ (b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}) & (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}) & (b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23}) \\ (b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21}) & (b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22}) & (b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23}) \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

On aurait également, par exemple

$$\mathbf{Av}=\begin{bmatrix} (a_{11}v_1+a_{12}v_2+a_{13}v_3) \\ (a_{21}v_1+a_{22}v_2+a_{23}v_3) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

et

$$\mathbf{v}^T\mathbf{B} = \big[(v_1b_{11} + v_2b_{21} + v_3b_{31}) \quad (v_1b_{12} + v_2b_{22} + v_3b_{32})\big] \tag{2.15}$$

de même que

$$\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^T\mathbf{v} = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2). \tag{2.16}$$

On remarque, à partir de ces exemples, certaines règles s'appliquant au produit matriciel. D'abord, on aura en général

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{2.17}$$

c'est-à-dire que le produit matriciel n'est pas commutatif. De plus, on a

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \tag{2.18}$$

ou en d'autres termes, la transposée d'un produit matriciel est égale au produit, dans l'ordre inverse, des transposées des matrices composant le produit.

Plusieurs des matrices considérées dans cet ouvrage, comme les matrices de rotation définies dans ce chapitre, sont des matrices carrées, c'est-à-dire des matrices dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Certains concepts importants s'appliquent à ce type de matrice. On définit d'abord la *matrice identité* comme une matrice de dimension $n \times n$ dont tous les éléments sont nuls sauf ceux sur la diagonale qui valent tous 1. On note cette matrice $\mathbf{1}$.

Une autre notion importante est celle d'*inverse* d'une matrice. Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de dimension $n \times n$. L'inverse de la matrice $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^{-1}$, est la matrice pour laquelle on a

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1} \tag{2.19}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité de dimension $n \times n$. La matrice $\mathbf{A}^{-1}$ existe et est unique si et seulement si la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas *singulière*. Une matrice singulière est une matrice dont toutes les colonnes ne sont pas indépendantes. Si la matrice n'est pas singulière, le calcul de la matrice inverse ou la résolution d'un système linéaire d'équations peut être réalisé, entre autres, par élimination gaussienne. Toutefois, pour des matrices de petite dimension ($n \leq 4$), l'inverse peut être calculée suivant la formule suivante, obtenue de la formule de Laplace pour les déterminants

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(\mathrm{com}(\mathbf{A}))^T \tag{2.20}$$

où $\det(\mathbf{A})$ est le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$ et où $\mathrm{com}(\mathbf{A})$ est la comatrice de $\mathbf{A}$, c'est-à-dire la matrice dont l'élément (i, j) est le cofacteur (i, j) de la matrice $\mathbf{A}$. Le cofacteur (i, j) est à son tour défini comme

$$[\mathrm{cof}(\mathbf{A})]_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij}) \tag{2.21}$$

où $\mathbf{A}_{ij}$ est la sous-matrice de dimension $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de $\mathbf{A}$. Il est à noter que l'équation (2.20) devrait être utilisée seulement pour des matrices de petite dimension car elle devient très inefficace pour des matrices plus grandes.

Exemple 2.1 *Soit une matrice donnée par*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On désire calculer l'inverse de cette matrice en utilisant l'équation (2.20). On calcule d'abord le déterminant en faisant un développement par rapport à la première ligne de la matrice. On trouve

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (3 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - 1 \cdot (4 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 2.$$

On calcule alors les cofacteurs en calculant les déterminants des sous-matrices de dimension 2×2 et on forme la comatrice. On obtient

$$\mathrm{com}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et l'inverse de $\mathbf{A}$ peut alors être obtenue directement de l'équation (2.20), ce qui donne

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}(\mathrm{com}(\mathbf{A}))^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

On peut alors facilement vérifier que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$, ce qui confirme que la matrice obtenue est bien l'inverse de la matrice $\mathbf{A}$.

Un dernier point à traiter dans cette section est celui du calcul des dérivées des vecteurs et des matrices. Ces opérations seront parfois utilisées dans cet ouvrage et il est donc important de connaître les règles de dérivation des vecteurs et matrices par rapport à des variables scalaires ou par rapport à des vecteurs. Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ des vecteurs de dimension m et n, respectivement. De