

# Algèbre et géométrie euclidienne

## Logique

### Assertions

Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments  $\{V, F\}$ . Une assertion  $P : E \rightarrow \{V, F\}$  est aussi appelée une **propriété des éléments** de  $E$ .

### Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

$P$	$Q$	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$

### Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \text{ ou } Q \Leftrightarrow Q \text{ ou } P$
- $P \text{ et } Q \Leftrightarrow Q \text{ et } P$

$P$ ,  $Q$  et  $R$  trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
- $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow P \text{ et } (Q \text{ et } R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \text{ et } (Q \text{ ou } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
- $P \text{ ou } (Q \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ ou } R) \text{ et } (P \text{ ou } Q)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff \text{non}(\text{non}P)$
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q)$
- $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

### Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble  $E$  sont de l'un des deux types suivants :

- **Existentiel** : il existe un élément de  $E$  vérifiant  $P$ . On note  $\exists x \in E, P(x)$ .
- **Universel** : tous les éléments de  $E$  vérifient  $P$ . On note  $\forall x \in E, P(x)$ .

S'il existe un unique élément de  $E$  vérifiant  $P$ , on note  $\exists! x \in E, P(x)$ .

### Règles de calcul pour les quantificateurs

- $\text{non}(\exists x \in E; P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$
- $\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E; \text{non } P(x))$
- $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \iff \forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$
- $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y) \iff \exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$

### Stratégies pour une implication

- $P \Rightarrow Q$
- $(\text{non } P) \text{ ou } Q$
- $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$
- $\text{non}[P \text{ et } \text{non } Q]$ .

Ces équivalences sont utiles pour démontrer  $P \Rightarrow Q$  par contraposée, ou par l'absurde.

## Ensembles

### Parties d'un ensemble

$E$  un ensemble,  $A, B, C$  des parties de  $E$ . On dit que

- $A$  est **inclus** dans  $B$  ( $A \subset B$ ) si tout élément de  $A$  appartient à  $B$ .
- $A$  et  $B$  sont **égaux** ( $A = B$ ), lorsque  $A \subset B$  et  $B \subset A$ .

### Opérations élémentaires sur les parties

- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$  est la **réunion** de  $A$  et  $B$ .
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$  est l'**intersection** de  $A$  et  $B$ .
- $\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ , est le **complémentaire** de  $A$  dans  $E$ .
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$  est la **différence** de  $A$  et  $B$ .

### Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- La réunion est distributive sur l'intersection :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

**Fonction indicatrice d'une partie**

Pour tout  $x \in E$ , on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} . \quad \mathbf{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\} \text{ est la fonction indicatrice de } A.$$

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$

**Produit cartésien de deux ensembles**

Soit  $E, F$  deux ensembles, le **produit cartésien** de  $E$  et  $F$  est l'ensemble défini par  $E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$ . L'égalité de deux couples  $(x, y)$  et  $(x', y')$  est définie par  $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ .

**Applications**

**Application injective, surjective**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite :

- **injective** si  $(\forall (x, x') \in E \times E), (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$  ;
- **surjective** si  $(\forall y \in F), (\exists x \in E); y = f(x)$ .

**Composée d'applications et injectivité, surjectivité**

Soit  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  deux applications.

- $f$  et  $g$  injectives  $\Rightarrow g \circ f$  injective.
- $g \circ f$  injective  $\Rightarrow f$  injective.
- $f$  et  $g$  surjectives  $\Rightarrow g \circ f$  surjective.
- $g \circ f$  surjective  $\Rightarrow g$  surjective.

**Application bijective**

Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e.  $(\forall y \in F), (\exists! x \in E); y = f(x)$ .

**Application réciproque d'une bijection**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une **bijection**. On définit une application  $f^{-1} : F \rightarrow E$ , appelée **application réciproque** de  $f$ , par

$$\forall (x, y) \in E \times F, \begin{cases} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in E \\ y = f(x) \end{cases} .$$

$$f \text{ bijective} \iff \exists g : F \rightarrow E \begin{cases} f \circ g = Id_F \\ g \circ f = Id_E \end{cases} \quad \text{En ce cas, } g = f^{-1} \text{ est l'application réciproque de } f.$$

**Composée de bijections**

Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications.

$$f \text{ et } g \text{ bijectives} \Rightarrow g \circ f \text{ bijective} \quad \text{et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## Image directe et image réciproque d'une partie

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A \subset E$ ,  $B \subset F$ .

- L'image directe de  $A$  par  $f$  est le sous-ensemble de  $F$  défini par  
 $f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}$ .
- L'image réciproque de  $B$  par  $f$  est le sous-ensemble de  $E$  défini par  
 $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ .

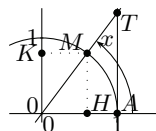
## Trigonométrie circulaire

### Le cercle trigonométrique

$$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

- $\cos(x) = \overline{OH}$ ,  $\sin(x) = \overline{OK}$

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



### Valeurs remarquables

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

### Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ et } 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

### Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$  •  $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$  •  $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$  •  $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$  •  $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$  •  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$  •  $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$  •  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$  •  $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

### Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$  •  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$  •  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$  •  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

### Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$  •  $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

\_\_\_\_\_ **Formules de linéarisation** \_\_\_\_\_

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

\_\_\_\_\_ **Formules de factorisation** \_\_\_\_\_

- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

**Nombres complexes**

\_\_\_\_\_ **Notation algébrique des nombres complexes** \_\_\_\_\_

$$\forall z \in \mathbf{C} \exists!(x, y) \in \mathbf{R}^2, z = x + iy$$

$x = \Re(z)$  est la **partie réelle**  
 $y = \Im(z)$  est la **partie imaginaire** de  $z$ .

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re z = \Re z' \\ \Im z = \Im z' \end{cases}$$

$z, z'$  sont deux nombres complexes.

- *Le nombre complexe  $\bar{z} = x - iy$  est le **conjugué** de  $z$ .*
- *Le nombre réel positif  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  est le **module** de  $z$ .*

\_\_\_\_\_ **Nombres complexes de module 1** \_\_\_\_\_

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$\theta \in \mathbf{R}$ ,  $e^{i\theta}$  est l'**exponentielle imaginaire (pure)** d'angle  $\theta$ .

- Pour tout nombre complexe  $z$  de module 1, il existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tel que  $z = e^{i\theta}$
- Pour tout couple  $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$  de réels,  $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi]$

\_\_\_\_\_ **Règle de calcul pour l'exponentielle imaginaire** \_\_\_\_\_

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \quad (\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$$

\_\_\_\_\_ **Formules d'Euler et de Moivre** \_\_\_\_\_

- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**Notation exponentielle d'un complexe non nul**

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists (\rho, \theta) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}, z = \rho e^{i\theta}$$

**Forme exponentielle** du nombre complexe non nul  $z$ .

Si  $z \in \mathbf{C}^*$  s'écrit  $z = \rho e^{i\theta}$  alors  $\rho$  est le **module** de  $z$  et  $\theta$  est appelé un **argument** de  $z$ . On note  $\arg(z)$  un argument quelconque de  $z$ .

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') [2\pi] \end{cases} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$$

**Exponentielle d'un complexe quelconque**

Soit  $z = x + iy$  un complexe présenté en notation algébrique. On définit

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'} \quad (z, z') \in \mathbf{C}^2$$

**Racines nièmes du nombre complexe 1**

Soit  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ . On note  $\omega_n = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ .

$\omega_n$  est l'exponentielle imaginaire d'angle  $\frac{2\pi}{n}$ .

$$\mathbf{U}_n = \{\omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\}$$

$\mathbf{U}_n$  est l'ensemble des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité.

$$1 + \omega_n + \omega_n^2 + \dots + \omega_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$$

La somme des racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité est nulle.

**Racines nièmes d'un complexe**

L'ensemble des  $n$  racines  $n^{\text{ièmes}}$  de  $a \in \mathbf{C}^*$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\zeta_0 \omega_n^k; k \in \mathbf{Z}\} = \{\zeta_0, \zeta_0 \omega_n, \zeta_0 \omega_n^2, \dots, \zeta_0 \omega_n^{n-1}\} \\ &= \{\sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2\pi}{n}}, \dots, \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a + 2(n-1)\pi}{n}}\} \end{aligned}$$

où  $\zeta_0$  est une solution particulière de  $z^n = a$ , par exemple  $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|} e^{i \frac{\arg a}{n}}$ .

**Équations polynomiales de degré 2**

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$

$(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ ,  $\delta$  est l'une des racines carrées (complexes) de  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Système somme-produit**

Soit  $(\sigma, \rho) \in \mathbf{C}^2$ . Alors le couple  $(z_1, z_2)$  est solution du système  $\begin{cases} z_1 + z_2 = \sigma \\ z_1 \times z_2 = \rho \end{cases}$  si et seulement si  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation  $z^2 - \sigma z + \rho = 0$ .

**Nombres complexes et géométrie**

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  un repère orthonormé direct.

- Au point  $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{R}}$ , on associe son **affiche**, le nombre complexe  $z = x + iy$ .
- À  $z = x + iy$ , on associe son **image** dans le plan, le point  $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{R}}$ .
- L'application  $z \mapsto z + u$  correspond à la translation du vecteur d'affixe  $u$ .
- L'application  $z \mapsto \bar{z}$  correspond à la réflexion par rapport à l'axe des abscisses.
- L'application  $z \mapsto az + b$ , avec  $a \neq 1$  correspond à la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$ , de rapport  $|a|$  et d'angle  $\arg(a)$ .

**Géométrie élémentaire dans le plan**

**Modes de repérage dans le plan**

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct (ROND) du plan.

Pour  $\theta \in \mathbf{R}$ , on définit  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta) \cdot \vec{i} + \sin(\theta) \cdot \vec{j}$  et  $\vec{v}_\theta = -\sin(\theta) \cdot \vec{i} + \cos(\theta) \cdot \vec{j}$

Soit  $M$  le point de **coordonnées cartésiennes**  $(x, y)$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ .  
Il existe un couple  $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\theta$ .

$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$	$(\rho, \theta)$ est un système de <b>coordonnées polaires</b> pour $M$ .
--	---

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$  des ROND. Soit  $M \in \mathcal{P}$  un point du plan tel que  $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{R}}$ ,  $M\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{R}'}$ ,  $\Omega\left(\begin{smallmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{smallmatrix}\right)_{\mathcal{R}}$ . Les coordonnées de  $M$  dans les repères  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont liées par les formules :

$\begin{cases} X = \cos(\theta)(x - x_\Omega) + \sin(\theta)(y - y_\Omega) \\ Y = -\sin(\theta)(x - x_\Omega) + \cos(\theta)(y - y_\Omega) \end{cases}$	$\theta \equiv (\vec{i}, \vec{I}) [2\pi]$ est une mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\vec{I}$ .
---	--

**Produit scalaire et déterminant de deux vecteurs**

Lorsque  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul, on pose  $(\vec{u} | \vec{v}) = \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ . Sinon

- le **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini par  $(\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$  ;
- le **déterminant** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est défini par  $\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math> orthogonaux <math>\iff (\vec{u}   \vec{v}) = 0</math></li> <li>• <math>\vec{u}</math> et <math>\vec{v}</math> colinéaires <math>\iff \text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = 0</math></li> </ul>	$\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ deux vecteurs du plan
---	--

**Expression du produit scalaire et du déterminant**

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  une base orthonormée directe (BOND) du plan.

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(\vec{u}   \vec{v}) = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2</math></li> <li>• <math>\text{Det}(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 \times v_2 - u_2 \times v_1</math></li> </ul>	$\begin{aligned} \vec{u} &= u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v} &= v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 \end{aligned}$
---	--

## Droites affines du plan

- (S)  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbf{R}$  est un système d'équations paramétriques de la droite  $\mathcal{D}$  repérée par le point  $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  et le vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .
- $\mathcal{D}$  admet une **équation cartésienne** de la forme  $ax + by = c$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ , un vecteur normal à  $\mathcal{D}$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

$\begin{array}{ l} \updownarrow \\ \bullet M \in \mathcal{D} \\ \bullet \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \\ \bullet (\overrightarrow{AM}   \vec{n}) = 0. \end{array}$	$\mathcal{D}$ est la droite passant par $A$ , dirigée par $\vec{u}$ , de vecteur normal $\vec{n}$ .
---	---

$\mathcal{D}$  admet une équation normale de la forme  $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = p$ .

## Distance d'un point à une droite

- On appelle **projeté orthogonal du point  $M_0$  sur la droite  $\mathcal{D}$** , l'unique point  $H_0$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $(H_0M_0)$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .
- On appelle **distance** de  $M_0$  à  $\mathcal{D}$ , et on note  $d(M_0, \mathcal{D})$  la plus courte distance entre  $M_0$  et un point de  $\mathcal{D}$ .

Soit  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$ , de vecteur directeur  $\vec{u}$ , de vecteur normal  $\vec{n}$  d'équation cartésienne  $ax + by = c$ . Alors

$$d(M_0, \mathcal{D}) = M_0H_0 = \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{AM_0}, \vec{u})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|(\overrightarrow{AM_0} | \vec{n})|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## Cercles du plan

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle du plan,  $H \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  un point de  $\mathcal{C}$ .

- $\mathcal{C}$  a une équation de la forme  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$  avec  $c + a^2 + b^2 \geq 0$ .
- La tangente à  $\mathcal{C}$  en  $H$  a pour équation  $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) = c$ .

## Géométrie élémentaire de l'espace

### Modes de repérage dans l'espace

Soit  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un ROND de l'espace et  $M$  un point de  $\mathcal{E}$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $\mathcal{P}(O, \vec{i}, \vec{j})$ , passant par  $O$ , dirigé par  $(\vec{i}, \vec{j})$  et orienté par  $\vec{k}$ .

On pose  $\rho = OH$ ,  $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) [2\pi]$ , de sorte que

$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$	$(\rho, \varphi, z)$ est un système de <b>coordonnées cylindriques</b> de $M$ .
---	---

On pose  $r = OM$ ,  $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) [2\pi]$ ,  $\theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{k}) \in [0, \pi]$  de sorte que :