PCSI

PC

Patrick Beynet
Stéphanie Calmettes
Thierry Finot
Michel Goumi
Ivan Gozard
Marie-Laure Kaiser-Lavielle
Nicolas Nguyen
Lionel Vidal

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

FORMULAIRE

NOUVEAUX PROGRAMMES

MATHS PHYSIQUE CHIMIE SII

3e édition

Les 2 années
en 1 clin d'œil

ellipses

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Logique

Assertions

*Une **assertion mathématique** est une application d'un ensemble de variables, à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{V, F\}$. Une assertion $P : E \to \{V, F\}$ est aussi appelée une **propriété des éléments** de E.*

Connecteurs logiques élémentaires

La négation, la disjonction, la conjonction, l'implication et l'équivalence de deux assertions sont définies par leurs tables de vérité :

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ et } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Propriétés des connecteurs logiques élémentaires

- $P \,ou\, Q \iff Q \,ou\, P$
- $P \,et\, Q \iff Q \,et\, P$

P, Q et R trois assertions. La conjonction et la disjonction sont commutatives.

- $(P \,ou\, Q) \,ou\, R \iff P \,ou\, (Q \,ou\, R)$
- $(P \,et\, Q) \,et\, R \iff P \,et\, (Q \,et\, R)$

La conjonction et la disjonction sont associatives.

- $P \,et\, (Q \,ou\, R) \iff (P \,et\, Q) \,ou\, (P \,et\, R)$
- $P \,ou\, (Q \,et\, R) \iff (P \,ou\, R) \,et\, (P \,ou\, R)$

La conjonction et la disjonction sont distributives l'une sur l'autre.

- $P \iff non(nonP)$
- $non(P \text{ ou } Q) \iff (non\ P \text{ et } non\ Q)$
- $non(P \text{ et } Q) \iff (non\ P \text{ ou } non\ Q)$

Les deux dernières assertions sont les lois de Morgan.

Quantificateurs

Les propriétés d'un ensemble E sont de l'un des deux types suivants :

- ***Existentiel :*** *il existe un élément de E vérifiant P. On note $\exists x \in E \;\; P(x)$.*
- ***Universel :*** *tous les éléments de E vérifient P. On note $\forall x \in E \;\; P(x)$.*

S'il existe un unique élément de E vérifiant P, on note $\exists!\ x \in E,\ P(x)$.

Règles de calcul pour les quantificateurs

- $non\ \big(\exists x \in E;\ \ P(x)\big) \iff \big(\forall x \in E,\ \ non\ P(x)\big)$
- $non\ \big(\forall x \in E,\ \ P(x)\big) \iff \big(\exists x \in E;\ \ non\ P(x)\big)$
- $\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y) \iff \forall y \in F,\ \forall x \in E\ , P(x,y)$
- $\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y) \iff \exists y \in F,\ \exists x \in E\ , P(x,y)$

Stratégies pour une implication

$\Updownarrow$
- $P \Rightarrow Q$
- $(non\ P)\ ou\ Q$
- $non\ Q \Rightarrow non\ P$
- $non\big[P \text{ et } non\ Q\big]$.

Ces équivalences sont utiles pour démontrer $P \Rightarrow Q$ par contraposée, ou par l'absurde.

Théorème de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des éléments de $\mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\big) \end{cases}$$

Théorème de récurrence double

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\big) \end{cases}$$

Théorème de récurrence forte

$$\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n) \iff \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ (\forall n \geqslant n_0),\ \big(\mathcal{P}(n_0) \textbf{ et } \cdots \textbf{ et } \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Ensembles

Parties d'un ensemble

E un ensemble, A, B, C des parties de E. On dit que

- *A est **inclus** dans B ($A \subset B$) si tout élément de A appartient à B.*
- *A et B sont **égaux** ($A = B$), lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Opérations élémentaires sur les parties

- *$A \cup B = \{x \in E |\ x \in A$ ou $x \in B\}$ est la **réunion** de A et B.*
- *$A \cap B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \in B\}$ est l'**intersection** de A et B.*
- *$\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A dans E.*
- *$A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \notin B\}$ est la **différence** de A et B.*

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

- $\complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
- $\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Lois de Morgan

Fonction indicatrice d'une partie

Pour tout $x \in E$, on note

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}.$$

$\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ est la fonction indicatrice de A.

- $\mathbf{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbf{1}_A$
- $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$
- $\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A \, (1 - \mathbf{1}_B)$
- $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \, \mathbf{1}_B$

Produit cartésien de deux ensembles

*Soit E, F deux ensembles, le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble défini par $E \times F = \{(x, y) ;\ x \in E, y \in F\}$. L'égalité de deux couples (x, y) et (x', y') est définie par $(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.*

Applications

Application injective, surjective

Une application $f : E \to F$ est dite :

- ***injective** si $\big(\forall (x, x') \in E \times E\big),\ \big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big)$;*
- ***surjective** si $(\forall y \in F), (\exists x \in E) ;\ \ y = f(x)$.*

Composée d'applications et injectivité, surjectivité

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

- f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.
- f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
- $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Application bijective

*Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective, i.e.* $(\forall y \in F),\ (\exists!\, x \in E)\ ;\ \ y = f(x)$.

Application réciproque d'une bijection

*Soit $f : E \to F$ une **bijection**. On définit une application $f^{-1} : F \to E$, appelée **application réciproque** de f, par*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ \left\{ \begin{array}{l} y \in F \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in E \\ y = f(x) \end{array} \right. .$$

f bijective $\iff \exists g : F \to E\ \begin{array}{l} f \circ g = id_F \\ g \circ f = id_E \end{array}$

En ce cas, $g = f^{-1}$ est l'application réciproque de f.

Composée de bijections

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

f et g bijectives $\Rightarrow g \circ f$ bijective

et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Image directe et image réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E,\ B \subset F$.

- *L'**image directe** de A par f est le sous-ensemble de F défini par*
  $$f(A) = \{f(x)\,;\ x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\}.$$
- *L'**image réciproque** de B par f est le sous-ensemble de E défini par*
  $$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

Relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$

*Soit a et b deux entiers naturels. On dit que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a, s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$. On note cette relation $b \mid a$.*

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

- $a = bq + r$
- $0 \leqslant r < b$

q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Soit $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. b divise a *si et seulement si* le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

PGCD, PPCM de deux entiers

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ deux entiers.

• *Si a ou b est non nul, le plus grand entier, diviseur de a et de b est appelé* ***plus grand diviseur commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*

• *Si a et b sont non nuls, le plus petit entier strictement positif, multiple de a et de b est appelé* ***plus petit multiple commun*** *à a et b. Cet entier naturel est noté $PGCD(a, b)$.*

Nombres premiers

On appelle ***nombre premier*** *tout entier naturel $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même. Un entier naturel $n \geqslant 2$ qui n'est pas premier est dit* ***composé****. On note $\mathfrak{P}$ l'ensemble des nombres premiers.*

- Un entier $n \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier.
- Un entier $n \geqslant 2$ composé admet un diviseur premier p vérifiant $p \leqslant \sqrt{n}$.

L'ensemble $\mathfrak{P}$ des nombres premiers est infini.

Décomposition primaire d'un entier

Tout entier $n \geqslant 2$ se décompose de manière unique sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_N^{\alpha_N}$$

$p_1, \ldots, p_N$ sont premiers ($p_1 < \cdots < p_N$) et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ des entiers naturels non nuls.

Cette écriture s'appelle la ***décomposition d'un entier en produit de nombres premiers****.*

> ***Nous devons plutôt nous fier***
> ***au calcul algébrique qu'à notre jugement.***
>
> **Leonhard Euler**

Techniques fondamentales en algèbre et analyse

Compléments de calcul algébrique

Sommes et produits finis

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels et* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. On note*

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} x_k \text{ la somme des } x_k \\ P_n &= x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k\in\{0,\ldots,n\}} x_k \text{ le produit des } x_k. \end{aligned}$$

Les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition se généralisent aux sommes et produits finis.

$$\sum_{k=0}^{n} \left[a_{k+1} - a_k\right] = a_{n+1} - a_0$$

Somme télescopique
$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

La somme des n premiers (resp. carrés, cubes d') entiers est donnée par :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Coefficients binomiaux

Le produit des n premiers entiers est la **factorielle de** n. On note $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

On convient que $0! = 1$.

$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $0 \leqslant p \leqslant n$ et 0 sinon.

Coefficients du binôme où $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$.

Les coefficients du binôme sont des entiers naturels qui vérifient les propriétés suvantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

Identité géométrique

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k}$$

Avec $b = 1$, on obtient la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison a.

Systèmes d'équations linéaires

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système de n équations linéaires à p inconnues (S) ne change pas si l'on effectue sur les lignes les **opérations élémentaires** suivantes :

- échanger l'ordre des lignes L_i et L_j, $(L_i \leftrightarrow L_j)$,
- multiplier la ligne L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^\star$, $(L_i \leftarrow \lambda_i\, L_i)$,
- ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre L_j $(i \neq j)$, $(L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Inégalités dans $\mathbb{R}$

La relation $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes :

- **réflexivité** : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$
- **antisymétrie** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y$
- **transitivité** : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

*On dit que $\leqslant$ est une **relation d'ordre** dans $\mathbb{R}$.* De plus, cet ordre est total car

- **ordre total** : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)$.

On note $x < y$ la relation $x \leqslant y$ *et* $x \neq y$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}, x + t < y + t$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^{+\star}, x\,t < y\,t$.

*Pour tout réel x, on définit la **valeur absolue** de x par*

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$

Inégalités triangulaires

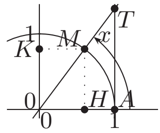
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$, unique tel que $p \leqslant x < p+1$. Cet entier relatif p est appelé **partie entière** de x. On note $p = \lfloor x \rfloor$.

Compléments de tigonométrie

Le cercle trigonométrique

$x \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

- $\cos(x) = \overline{OH}$, $\sin(x) = \overline{OK}$
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AT}$



Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Formules fondamentales de trigonométrie circulaire

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \ \text{et} \ 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Propriétés de symétrie

- $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$