ECT
1re et 2e années

Sylvain Rondy
Pierre Berlandi
Gianfranco Niffoi
Nicolas Pierson
Anne-Sophie Pierson-Fertel

PRÉPAS SCIENCES
COLLECTION DIRIGÉE PAR BERTRAND HAUCHECORNE

FORMULAIRE
MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE

2e édition

NOUVEAUX PROGRAMMES !

Les 2 années
en 1 clin d'œil

ellipses

1. CALCULS

Identités remarquables

Si a et b sont deux réels, on a :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Opérations sur les fractions

Si a, b, c et d sont des réels, avec b et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

Si a, b, c et d sont des réels, avec b et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Si a, b, c et d sont des réels, avec b, c et d non nuls, on a :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Puissances

Si n et p sont des entiers naturels, on a, pour tout réel a :

$$a^{n+p} = a^n\, a^p$$

$$\left(a^n\right)^p = a^{np}$$

Si de plus, a est différent de 0, on a : $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Si a et b sont des réels, on a, pour tout entier naturel n :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Si de plus, b est différent de 0, on a : $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

&

Il est difficile de faire la différence entre un mathématicien qui dort et un mathématicien qui travaille.

André Lichnerowicz

2. SOMMES ET PRODUITS

Somme des termes d'une suite constante

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a$$

Sommes des *n* premiers entiers naturels non nuls

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sommes géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement : $\forall q \neq 1,\ \forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Distributivité, commutativité et associativité

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$ (λ ne dépend pas de l'indice.)

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

Changement d'indice

Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.

Changement d'indice : $i = k + 1$.

$$\sum_{k=p}^{n} x_{k+1} = \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i$$

Télescopage

Quels que soient les réels $x_0, ..., x_{n+1}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x_{k+1} - x_k \right) = x_{n+1} - x_0$$

Factorielle

Pour tout entier naturel n, on appelle *factorielle* de n, et on note $n!$, l'entier naturel défini par $0! = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times ... \times n$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n! = n \times (n-1)!$.

Produit de termes d'une suite constante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$$

Opérations compatibles avec $\prod$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\prod_{k=1}^{n} y_k \right)$$

Si aucun des y_k n'est nul, alors : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{y_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} y_k}$

Télescopage

Si aucun des x_k n'est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_0}$$

&

Il n'y a pas de place durable dans le monde
pour les mathématiques laides.

Godfrey Hardy

3. ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Comparaison d'ensembles

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

On dit que deux ensembles A et B sont *égaux*, on note $A = B$, lorsque l'on a : $A \subset B$ et $B \subset A$.

On dit que l'ensemble A est une *partie* de l'ensemble E (ou encore un *sous-ensemble* de E) lorsque A est inclus dans E.
L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Intersection et réunion

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B}$$

La *réunion* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans l'un au moins des ensembles A ou B.

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B}$$

Commutativité

L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\boxed{A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A}$$

Associativité

L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\boxed{\begin{array}{c}(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\end{array}}$$

Les ensembles considérés dans la suite sont tous des parties d'un ensemble Ω .

Élément neutre

Ω est élément neutre pour l'intersection : $A \cap \Omega = A$.
$\varnothing$ est élément neutre pour la réunion : $A \cup \varnothing = A$.

Inclusion, intersection et réunion

$$\boxed{A \cap B \subset A \ \text{ et } \ A \subset A \cup B}$$

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

$$\boxed{A \cap A = A \text{ et } A \cup A = A}$$

Distributivité

L'intersection et la réunion sont distributives l'une sur l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ensembles disjoints

Les ensembles A et B sont *disjoints* lorsque:

$$\boxed{A \cap B = \varnothing}$$

Complémentaire

Le *complémentaire* de A est l'ensemble, noté $\overline{A}$, contenant les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. On a : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$.

On a : $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{\varnothing} = \Omega$; $\overline{\Omega} = \varnothing$.
$\overline{A}$ est la seule partie de Ω vérifiant : $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Lois de Morgan

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Plus généralement, si I désigne un ensemble d'indices, on a :

$$\boxed{\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \ \text{ et } \ \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}}$$

3. Ensembles et applications

Produit cartésien

On définit le *produit cartésien* des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par :
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n), \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A_i \}$.
Le produit $A \times A$ est noté A^2.

Ensembles finis

Un ensemble E est dit *fini* s'il possède un nombre fini d'éléments.

Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est appelé *cardinal* de E, et est noté Card (E).
On a Card $(\varnothing) = 0$.

Cardinal d'une réunion disjointe

Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

Cardinal d'un produit cartésien

Si A et B sont deux ensembles, alors on a :

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B)$$

Dans toute la suite, E, F et G désignent des ensembles.

Fonctions et applications

Une fonction f de E dans (ou vers) F est un procédé qui permet d'associer certains éléments de E avec des éléments de F appelés leurs images, de telle façon que tout élément x de E possède au maximum une image y dans F.

Une application f de E dans F est une fonction de E dans F telle que tout élément de E possède exactement une image par f dans F.

Identité

On appelle *identité* de E (ou *application identique* de E), l'application de E dans E, notée Id_E et définie par :

$$\boxed{\forall x \in E,\ Id_E(x) = x}$$