j'intègre

ECG
1re & 2e années
NOUVEAUX PROGRAMMES

DANIEL FREDON • JEAN-NOËL BEURY

FORMULAIRE

Mathématiques approfondies Informatique

L'ESSENTIEL DES 2 ANNÉES DANS VOTRE POCHE !

DUNOD

Cet ouvrage représente une synthèse des deux années de ECG en mathématiques et en informatique, option mathématiques approfondies, avec des repérages indiquant première année ❶ ou deuxième année ❷.

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084157-8

Table des matières

Mathématiques

Informatique

Mathématiques

1. Algèbre générale

1.1 Éléments de logique

➊ Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

➊ Connecteurs logiques

Négation non p

« non p » est vraie si, et seulement si, p est fausse.

Conjonction p et q

« p et q » est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont vraies.

Disjonction p ou q

« p ou q » est vraie si, et seulement si, au moins une des propositions est vraie.

☞ *Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert »*

Implication $\mathrm{p} \Longrightarrow \mathrm{q}$

$\mathrm{p} \Longrightarrow \mathrm{q}$ est définie par « (non p) ou q ».

☞ *Cela signifie que quand p est fausse, la proposition « $p \Longrightarrow q$ » est vraie. Pensez à des proverbes comme « si les poules avaient des dents alors je serais pape », « si les poules avaient des dents alors je serais en train de lire un chapitre de maths ». Ces phrases sont vraies, même si leur apport est faible !*

Équivalence $p \Longleftrightarrow q$

$p \Longleftrightarrow q$ est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

❶ Propriétés des connecteurs

$\text{non}(\text{non}\ p) = p$

$\text{non}(p \text{ ou } q) = (\text{non}\ p) \text{ et } (\text{non}\ q)$

$\text{non}(p \text{ et } q) = (\text{non}\ p) \text{ ou } (\text{non}\ q)$

$(p \Longrightarrow q) = [(\text{non}\ p) \text{ ou } q]$

$\text{non}(p \Longrightarrow q) = [p \text{ et } (\text{non}\ q)]$

☞ *La négation d'une implication n'est donc pas une implication.*

$(p \Longrightarrow q) = [(\text{non}\ q) \Longrightarrow (\text{non}\ p)]$

☞ *Cette seconde implication est la* **contraposée** *de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.*

$(p \Longleftrightarrow q) = [(p \Longrightarrow q) \text{ et } (q \Longrightarrow p)]$

☞ *Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.*

❶ Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel $\forall$

$$\forall x \quad \text{signifie : pour tout } x\,;$$

le quantificateur existentiel $\exists$

$$\exists\, x \quad \text{signifie : il existe au moins un } x.$$

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$
$$\exists\, x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x, y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\quad \forall x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x, y) \quad$ y dépend de x.

Dans l'écriture $\quad \exists\, y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y) \quad$ y est indépendant de x.

Négation

La négation de ≪ $\forall x \in E \quad x$ vérifie p ≫ est ≪ $\exists\, x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ≫.

La négation de ≪ $\exists\, x \in E \quad x$ vérifie p ≫ est ≪ $\forall x \in E \quad x$ ne vérifie pas p ≫.

❶ Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $p \Longrightarrow q$, alors on peut conclure que q est vraie.

☞ *Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.*

Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on a démontré $p \Longrightarrow q$, on peut dire qu'on a fait l'analyse du problème. On dit que p est une **condition suffisante** pour que q soit vraie.

Quand on a démontré $q \Longrightarrow p$, on peut dire qu'on a fait la synthèse du problème. On dit que p est une **condition nécessaire** pour que q soit vraie.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction.

☞ *Comme vous partez de non p, ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.*

Disjonction des cas

Elle est basée sur :

$$[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (\text{ non } p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas,

– un exemple est une illustration, mais ne démontre rien,

– un contre-exemple est une démonstration que la proposition est fausse.

Raisonnement par récurrence

■ Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n.

Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication $E(k) \Longrightarrow E(k+1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

■ Ce principe a diverses variantes, par exemple :

si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication

$$[\, E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \ldots \text{ et } E(k)\,] \Longrightarrow E(k+1)$$

est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

1.2 Calculs algébriques

❶ Sommes et produits

■ Notations

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, considérons une famille d'éléments $a_1, \ldots, a_n$.

On note cette famille $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, la somme des termes $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$, le produit des termes $\prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$.

■ Quelques propriétés

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i + y_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} y_i \quad ; \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i) = k\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \ ;$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i\, y_i) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \times \prod_{1\leqslant i\leqslant n} y_i \quad ; \quad \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i) = k^n \prod_{1\leqslant i\leqslant n} x_i \ ;$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} x_{ij} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant p} x_{ij}\Big) = \sum_{1\leqslant j\leqslant p}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_{ij}\Big)$$

❶ Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ .$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{si } q \neq 1 \qquad ; \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = n+1 \quad \text{si } q = 1.$$

❶ Coefficients binomiaux

■ Définition

Si $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ (lire : factorielle n) est le produit des n premiers nombres entiers. On pose $0! = 1$.

Sinon, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

■ **Propriétés**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad ; \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

❶ Triangle de Pascal

Sachant que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ la dernière propriété permet de calculer de proche en proche tous les nombres $\binom{n}{k}$. On obtient ainsi le tableau ci-dessous appelé triangle de Pascal où le nombre $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne k :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	$\boxed{35}$ +	$\boxed{21}$	7	1	
8	1	8	28	56	70	$\boxed{56}$	28	8	1

❶ Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

1.3 Vocabulaire des ensembles

❶ Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Avec une ou deux parties

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E, on définit :

■ Le **complémentaire** de A dans E :

$$\overline{A} = \{x \in E \ ; \ x \notin A\} \quad \text{noté aussi } E \setminus A \text{ ou } \complement_E A.$$

■ L'**intersection** de A et de B :

$$A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes.

■ La **réunion** de A et de B :

$$A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.

■ La **différence ensembliste** :

$$A \setminus B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

■ La **différence symétrique** :

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\ .$$

$A \triangle B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B.

Système complet

Un système complet, ou partition, d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E.

❶ Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

■ **Complémentaire**

$$\overline{E} = \emptyset \quad ; \quad \overline{\emptyset} = E \quad ; \quad \overline{\overline{A}} = A \quad ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}.$$

■ **Lois de de Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

■ **Réunion**

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup E = E.$$

■ **Intersection**

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap E = A.$$

■ **Réunion et intersection**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

❶ Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.

1.4 Vocabulaire des applications

❶ Généralités

Une application f de E dans F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique $y \in F$. On le note $f(x)$.

On dit que y est l'**image** de x et que x est un **antécédent** de y.

Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.

L'application identique de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.