

l'intègre

ECG

1^{re} & 2^e années

**NOUVEAUX
PROGRAMMES**

DANIEL FREDON • JEAN-NOËL BEURY

F O R M U L A I R E

Mathématiques approfondies Informatique

***L'ESSENTIEL
DES 2 ANNÉES
DANS VOTRE
POCHE !***

DUNOD

Cet ouvrage représente une synthèse des deux années de ECG en mathématiques et en informatique, option mathématiques approfondies, avec des repérages indiquant première année ❶ ou deuxième année ❷.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084157-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Mathématiques

1. Algèbre générale	1
1.1 Éléments de logique ❶	1
1.2 Calculs algébriques ❶	5
1.3 Vocabulaire des ensembles ❶	7
1.4 Vocabulaire des applications ❶	8
1.5 Dénombrément ❶	10
1.6 Polynômes ❶	12
2. Algèbre linéaire	14
2.1 Calcul matriciel ❶	14
2.2 Systèmes linéaires ❶	16
2.3 Espaces vectoriels ❶ et ❷	17
2.4 Applications linéaires ❶ et ❷	21
2.5 Matrices et applications linéaires ❶ et ❷	21
2.6 Valeurs propres, vecteurs propres ❷	25
3. Algèbre bilinéaire	28
3.1 Produit scalaire ❷	28
3.2 Espaces euclidiens ❷	30
4. Analyse	33
4.1 Les nombres réels ❶	33
4.2 Suites réelles ❶	34

IV Table des matières

4.3 Limites et continuité des fonctions réelles ❶	38
4.4 Dérivation ❶	42
4.5 Intégration sur un segment ❶	51
4.6 Séries numériques ❶	54
4.7 Intégrales sur un intervalle quelconque ❶	57
4.8 Fonctions de plusieurs variables ❷	61
4.9 Optimisation des fonctions de plusieurs variables ❷	64

5. Calcul des probabilités 68

5.1 Espace probabilisé ❶ et ❷	68
5.2 Variables aléatoires discrètes ❶	73
5.3 Loix discrètes usuelles ❶	38
5.4 Variables aléatoires à densité ❷	81
5.5 Loix usuelles à densité ❷	84
5.6 Convergence ❶ et ❷	87
5.7 Estimation ❷	91

Annexes des mathématiques 96

Informatique

1. Langage Python 98	98
1.1 Types de base ❶	98
1.2 Structures de contrôle ❶	99
1.3 Bibliothèques ❶	101
1.4 Représentation graphique ❶	106

2. Approximation numérique	114
3. Simulation d'expériences aléatoires	119
4. Algorithme du pivot de Gauss	131
5. Statistiques descriptives bivariées	134
6. Fonctions de plusieurs variables	136
7. Simulations de lois	144
8. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance	155
Index des mathématiques	163
Index de l'informatique	166

Mathématiques

1. Algèbre générale

1.1 Éléments de logique

①

Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

①

Connecteurs logiques

Négation non p

$\langle \text{non } p \rangle$ est vraie si, et seulement si, p est fausse.

Conjonction p et q

$\langle p \text{ et } q \rangle$ est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont vraies.

Disjonction p ou q

$\langle p \text{ ou } q \rangle$ est vraie si, et seulement si, au moins une des propositions est vraie.




Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert »

Implication $p \implies q$

$p \implies q$ est définie par $\langle (\text{non } p) \text{ ou } q \rangle$.

2 [1] Mathématiques

 Cela signifie que quand p est fausse, la proposition « $p \implies q$ » est vraie. Pensez à des proverbes comme « si les poules avaient des dents alors je serais pape », « si les poules avaient des dents alors je serais en train de lire un chapitre de maths ». Ces phrases sont vraies, même si leur apport est faible !

Équivalence $p \iff q$

$p \iff q$ est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

1 Propriétés des connecteurs


$$\text{non} (\text{non } p) = p$$

$$\text{non} (p \text{ ou } q) = (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$$


$$\text{non} (p \text{ et } q) = (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)$$

$$(p \implies q) = [(\text{non } p) \text{ ou } q]$$


$$\text{non} (p \implies q) = [p \text{ et } (\text{non } q)]$$

 La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$$(p \implies q) = [(\text{non } q) \implies (\text{non } p)]$$

 Cette seconde implication est la **contraposée** de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$$(p \iff q) = [(p \implies q) \text{ et } (q \implies p)]$$

 Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

1 Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel \forall

$\forall x$ signifie : pour tout x ;

le quantificateur existentiel \exists

$\exists x$ signifie : il existe au moins un x .

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$

$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y)$ y dépend de x .

Dans l'écriture $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y)$ y est indépendant de x .

Négation


La négation de « $\forall x \in E$ x vérifie p » est « $\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ».

La négation de « $\exists x \in E$ x vérifie p » est « $\forall x \in E$ x ne vérifie pas p ».

1 Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $p \implies q$, alors on peut conclure que q est vraie.

 Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.


Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on a démontré $p \implies q$, on peut dire qu'on a fait l'analyse du problème. On dit que p est une **condition suffisante** pour que q soit vraie.

Quand on a démontré $q \implies p$, on peut dire qu'on a fait la synthèse du problème. On dit que p est une **condition nécessaire** pour que q soit vraie.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction.

 Comme vous partez de non p , ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

Disjonction des cas

Elle est basée sur :

$$[(p \implies q) \text{ et } (\text{non } p \implies q)] \implies q$$

Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas,

- un exemple est une illustration, mais ne démontre rien,
- un contre-exemple est une démonstration que la proposition est fausse.

Raisonnement par récurrence

■ Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n .

Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geq 0$, l'implication $E(k) \implies E(k + 1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n .

■ Ce principe a diverses variantes, par exemple :

si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geq 0$, l'implication

$$[E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \dots \text{ et } E(k)] \implies E(k + 1)$$

est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n .

1.2 Calculs algébriques

1 Sommes et produits

■ Notations

Dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , considérons une famille d'éléments a_1, \dots, a_n .

On note cette famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, la somme des termes $\sum_{i=1}^n a_i$ ou $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$, le produit des termes $\prod_{i=1}^n a_i$ ou $\prod_{1 \leq i \leq n} a_i$.

■ Quelques propriétés

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i + y_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i + \sum_{1 \leq i \leq n} y_i ; \quad \sum_{1 \leq i \leq n} (kx_i) = k \sum_{1 \leq i \leq n} x_i ;$$

$$\prod_{1 \leq i \leq n} (x_i y_i) = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \times \prod_{1 \leq i \leq n} y_i ; \quad \prod_{1 \leq i \leq n} (kx_i) = k^n \prod_{1 \leq i \leq n} x_i ;$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} x_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq j \leq p} x_{ij} \right) = \sum_{1 \leq j \leq p} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_{ij} \right)$$

1 Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^n q^k = n + 1 \quad \text{si } q = 1 .$$

1 Coefficients binomiaux

■ Définition

Si $0 \leq k \leq n$, on définit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ (lire : factorielle n) est le produit des n premiers nombres entiers. On pose $0! = 1$.

6 [1] Mathématiques

Sinon, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

■ Propriétés

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad ; \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

1 Triangle de Pascal

Sachant que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ la dernière propriété permet de calculer de proche en proche tous les nombres $\binom{n}{k}$. On obtient ainsi le tableau ci-dessous appelé triangle de Pascal où le nombre $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne k :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

1 Formule du binôme

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

1.3 Vocabulaire des ensembles

①

Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Avec une ou deux parties

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E , on définit :

- Le **complémentaire** de A dans E :

$$\bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\} \quad \text{noté aussi } E \setminus A \text{ ou } \complement_E A.$$

- L'**intersection** de A et de B :

$$A \cap B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B , on dit que les parties A et B sont disjointes.

- La **réunion** de A et de B :

$$A \cup B = \{x \in E ; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B .

- La **différence ensembliste** :

$$A \setminus B = \{x \in E ; x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}.$$

- La **différence symétrique** :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B .

Système complet

Un système complet, ou partition, d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E , deux à deux disjointes, et dont la réunion est E .

①

Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A , B et C de E , on a les propriétés qui suivent.

- **Complémentaire**

$$\bar{\bar{E}} = \emptyset ; \quad \bar{\emptyset} = E ; \quad \bar{\bar{A}} = A ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \bar{B} \subset \bar{A}.$$

8 [1] Mathématiques

■ Lois de de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

■ Réunion

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup E = E.$$

■ Intersection

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap E = A.$$

■ Réunion et intersection

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1

Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n .

1.4 Vocabulaire des applications

1

Généralités

Une application f de E dans F est définie par son ensemble de départ E , son ensemble d'arrivée F et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique $y \in F$. On le note $f(x)$.

On dit que y est l'**image** de x et que x est un **antécédent** de y .

Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.

L'application identique de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E .