Daniel Fredon | Alexis Brès
Bérangère Godde | Jean-Noël Beury

FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE-CHIMIE
INFORMATIQUE

MPSI - MP2I
MP - MPI

8e édition

J'intègre

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083744-1

Table des matières

Avant-propos

Ce formulaire s'adresse aux étudiants des classes préparatoires scientifiques de MPSI, MP2I puis de MP, MPI.

Cette huitième édition corrigée est conforme aux nouveaux programmes 2021-2022.

Pour chaque paragraphe, vous trouverez :

– la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première ou de deuxième année ;

– parfois une indication MP2I, MPSI, MP ou MPI pour indiquer une notion spécifique au programme de telle ou telle filière.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, physique, chimie, informatique. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin de ce formulaire, un index vous permettra d'accéder rapidement à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir.

C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire, en quelque sorte un anxiolytique sans les effets secondaires. Mais vous risquez toutefois une certaine accoutumance : quand vous aurez commencé à vous en servir, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Bon travail et bon apprentissage !

Les auteurs

Les auteurs des parties de physique et chimie remercient Fabrice Dalier et Lucas Henry pour leur relecture et leurs conseils.

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

❶ Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

❶ Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leqslant b$, on a $[a, b] \subset X$.

1.2 Limites et continuité

❶ Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

❶ Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

❶ Relations de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

• Définitions

➣ On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A\,|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0.
Notation : $f = O(g)$ ou $f \preccurlyeq g$.

Si g ne s'annule pas sur J, cela signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur J.

➣ On dit que f est *négligeable* devant g, ou que g est prépondérant devant f, au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|$ pour tout x de J.
Notation : $f = o(g)$ ou $f \ll g$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

➣ On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0, si on a $f - g = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence. En particulier, si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

• Exemples fondamentaux

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll \mathrm{e}^{\gamma x} \quad \text{où} \quad \alpha > 0\,,\ \beta > 0\,,\ \gamma > 0\,.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha \ll x^\beta \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \ \text{ et } \ \beta < 0\,.$$

• Propriétés des fonctions équivalentes

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

☞ *Lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.*

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

• **Équivalents classiques**

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad ;$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

1.3 Dérivation

1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \quad (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

❶ Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \ .$$

f est strictement monotone sur I, dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

❶ Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

❶ Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

❶ Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leqslant K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leqslant K\,|x - x'|.$$

❶ Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.

❶ Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\ .$$

$x_1, \ldots, x_n \in I$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

❶ Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \Longleftrightarrow f'' \geqslant 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ |\sin x| \leqslant |x|$.

1.4 Suites numériques

❶ Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0$
$|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

❶ Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la *même* limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

❶ Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels ou complexes, on peut extraire une sous-suite convergente.

❶ Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.
Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.
Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

❶ Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors elles convergent vers l_1 et l_2. Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

❶ Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr.$

Somme des n premiers termes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\,\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$

❶ Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q\,u_n\ .$$

Terme général : $u_n = u_0\,q^n.$

Somme des n premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \begin{cases} = u_0\,\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ = n\,u_0 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

❶ Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = a\,u_n + b\,.$$

Si $a = 1$, elle est arithmétique de raison b.
Si $a \neq 1$, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a.

❶ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.
L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0 \qquad (E)$.

❶ Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

• Limite éventuelle
Si (u_n) converge vers $l \in I$ et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

• Cas f croissante
Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.

La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

• Théorème du point fixe
Si $f(I) \subset I$ et si f est contractante, alors l'équation $f(x) = x$ a une solution unique l dans I.

Toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.

1.5 Intégration

❶ Valeur absolue

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❶ Intégrales et ordre

- Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

❶ Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

❶ Intégration par parties

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I, et a et b des réels de I.

❶ Intégration par changement de variable

$$\int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

u de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f continue sur $[a, b]$.

❶ Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I, x_0 et x des points de I. On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $\quad P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$

est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;

et $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste intégral d'ordre n.

❷ Fonction intégrable

$\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe	$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge
$\displaystyle\int_a^{+\infty} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a,+\infty[$
$\displaystyle\int_a^{b} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$ converge	f intégrable sur $[a,b]$

❷ Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.
– Si g est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
– Si f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

• Domination

Si $f(x) \underset{+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f.

• Équivalence

Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.

❷ Situations de référence

• Pour $a>0$, $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a,+\infty[\iff \alpha > 1$.

• Pour $\alpha > 0$, $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

• $\dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0,a] \iff \alpha < 1$.

• $\ln x$ intégrable sur $]0,1]$.

❷ Théorème de convergence dominée

(f_n) fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur I.
(f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I,
il existe une fonction g continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, on ait $|f_n| \leqslant g$ (hypothèse de domination),

$\Longrightarrow$ les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$$

❷ Théorème d'intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\Longrightarrow$ f est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

❷ Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère I et J des intervalles de $\mathbb{R}$,
f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose :

- f continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction φ, intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que, pour tout x de J, on ait $|f(x, .)| \leqslant \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in J \qquad \forall t \in I \qquad f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur J.

❷ Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$, avec :

- f continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ intégrable sur I,

• $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,

• il existe une fonction φ intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout x de J, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)\right| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

1.6 Développements limités

❶ Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n. Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

❶ Développements limités usuels

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$
$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$
$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

1.7 Espaces vectoriels normés

❷ Norme

Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

(1) $\forall x \in E \quad N(x) \geqslant 0 \quad$ et $\quad N(x) = 0 \implies x = 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

(3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

❷ Normes équivalentes

Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E$:

$$\alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x).$$

Toute suite qui converge vers l pour une norme converge aussi vers l pour l'autre norme.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

❷ Voisinage

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V.

❷ Ouvert

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \qquad \exists\, r_a > 0 \qquad B(a, r_a) \subset A.$$

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a.

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A. On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

❷ Fermé

• Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

• a est un point adhérent à A si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient un point de A. L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence $\overline{A}$ de A. On a $A \subset \overline{A}$. Si $\overline{A} = E$, on dit que A est dense dans E.

• Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E, la limite appartient à A.

•L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

❷ Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
C'est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A.

❷ Caractérisation séquentielle de la continuité

Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

❷ Caractérisation topologique de la continuité

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E.

❷ Fonction lipschitzienne

• Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geqslant 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \qquad \|f(y) - f(x)\| \leqslant k\,\|y - x\|.$$

• Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

❶ - ❷ Continuité uniforme

• f de $D \subset E$ dans F est uniformément continue sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; \forall y \in D \quad \|x - y\| < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

• Si f est lipschitzienne sur D, alors f est uniformément continue sur D.

❷ Application linéaire continue

• Si f est linéaire de E dans F, les propositions suivantes sont équivalentes :

– f est continue sur E ;
– f est continue en 0 ;
– f est uniformément continue ;
– $\exists\, k \geqslant 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leqslant k\,\|x\|$.

• Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

❷ Compact

• Une partie A de E est une partie compacte ou est un compact si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.

• Un fermé inclus dans un compact est un compact.

• Tout compact est fermé et borné.

• Si E est de dimension finie, on a :

$$A \text{ compact} \iff A \text{ fermé et borné.}$$

❷ Fonction continue sur un compact

Soit f une fonction continue de E dans F et A un compact de E.

• f est uniformément continue sur A (théorème de Heine).

• $f(A)$ est un compact de F.

❷ Partie connexe par arcs

• Une partie A de E est connexe par arcs si, pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une fonction continue f de $[0,1]$ dans A telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

• Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

• Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

• **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie connexe, a et b deux vecteurs de A.

Pour tout réel x compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $x = f(c)$.

1.8 Séries numériques

❷ Série : convergence

Une série $\sum u_n$ converge si la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Une suite (u_n) converge $\iff$ la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

❷ Convergence absolue

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente ; mais la réciproque est fausse.

❷ Comparaison de deux séries à termes positifs

$\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge ;
$\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

❷ Cas de deux séries à termes positifs équivalents

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

Ce théorème n'est pas vrai pour des séries qui ne sont pas de signe constant.

❷ Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

❷ Séries géométriques

$$\sum_{n=0}^{+\infty} az^n = a\,\frac{1}{1-z}\,.$$	$a \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$ convergence (absolue) si, et seulement si, $\lvert z\rvert < 1$

❷ Série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$	$z \in \mathbb{C}$

❷ Règle de d'Alembert

Soit u_n une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.
Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

❷ Comparaison série-intégrale

Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

1.9 Suites et séries de fonctions

❷ Convergence simple d'une suite de fonctions

La suite (f_n) converge simplement sur A vers une fonction f, de A dans F, si : $\forall x \in A \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \lVert f_n(x) - f(x)\rVert = 0.$	$\lVert . \rVert$ est la norme dans A

❷ Convergence uniforme d'une suite de fonctions

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lVert f_n - f\rVert_\infty = 0$	$\lVert f\rVert_\infty = \sup\limits_{x\in I} \lvert f(x)\rvert$

convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple.