j'intègre

ECG

1re & 2e années

NOUVEAUX PROGRAMMES

DANIEL FREDON • JEAN-NOËL BEURY

FORMULAIRE

Mathématiques appliquées Informatique

L'ESSENTIEL DES 2 ANNÉES DANS VOTRE POCHE !

DUNOD

Cet ouvrage représente une synthèse des deux années de ECG en mathématiques et en informatique, option mathématiques appliquées, avec des repérages indiquant première année ❶ ou deuxième année ❷.

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084158-5

Table des matières

Mathématiques

1. Algèbre générale 1

1.1 Éléments de logique ❶ 1

1.2 Calculs algébriques ❶ 5

1.3 Vocabulaire des ensembles ❶ 7

1.4 Vocabulaire des applications ❶ 9

2. Algèbre linéaire et bilinéaire 11

2.1 Calcul matriciel ❶ 11

2.2 Systèmes linéaires ❶ 12

2.3 Espaces vectoriels réels de dimension finie ❷ 14

2.4 Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie ❷ 17

2.5 Réduction des matrices carrées ❷ 19

3. Théorie des graphes ❶ 21

4. Analyse 23

4.1 Suites réelles ❶ 23

4.2 Fonctions de bases ❶ 27

4.3 Limite et continuité d'une fonction en un point ❶ 31

4.4 Dérivation ❶ 34

4.5 Intégration sur un segment ❶ 40

4.6 Équations différentielles linéaires à coefficients constants ❶ et ❷ 43

4.7 Séries numériques ❶ 46

4.8 Intégrales sur un intervalle quelconque ❶ 49

4.9 Fonctions de deux variables ❷ 53

5. Statistique descriptive 58

5.1 Statistique univariée ❶ 58

5.2 Statistique bivariée ❷ 61

6. Probabilités 64

6.1 Dénombrement ❶ 64

6.2 Espace probabilisé ❶ 66

6.3 Variables aléatoires discrètes ❶ 70

6.4 Lois discrètes usuelles ❶ 74

6.5 Graphes probabilistes (chaînes de Markov) ❷ 77

6.6 Variables aléatoires à densité ❷ 78

6.7 Lois usuelles à densité ❷ 81

6.8 Convergence et approximations ❷ 84

6.9 Estimation ❷ 87

Annexes 92

Informatique

1. Langage Python **94**

1.1 Types de base ❶ 94

1.2 Structures de contrôle ❶ 97

1.3 Bibliothèques ❶ 99

1.4 Représentations graphiques ❶ 109

2. Algorithmique des listes **113**

2.1 Recherche dans une liste, Recherche par dichotomie ❶ 113

2.2 Algorithme glouton❶ 115

2.3 Exemples simples d'algorithmes de tris ❶ 116

3.Statistiques descriptives et analyse de données **118**

3.1 Analyse de données avec la bibliothèque pandas ❶ 118

3.2 Statistiques descriptives bivariées ❷ 121

4. Approximation numérique **124**

5. Graphes **128**

6. Recherche du plus court chemin **132**

7. Simulation d'expériences aléatoires **137**

8. Bases de données **142**

9. Équations et systèmes différentiels **148**

10. Chaînes de Markov **151**

11. Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance **156**

Index des mathématiques 165

Index de l'informatique 167

Mathématiques

1. Algèbre générale

1.1 Éléments de logique

❶ Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).

Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

❶ Connecteurs logiques

Négation non p

« non p » est vraie si, et seulement si, p est fausse.

Conjonction p et q

« p et q » est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont vraies.

Disjonction p ou q

« p ou q » est vraie si, et seulement si, au moins une des propositions est vraie.

☞ *Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert »*

Implication p $\Longrightarrow$ q

p $\Longrightarrow$ q est définie par « (non p) ou q ».

☞ *Cela signifie que quand p est fausse, la proposition « $p \Longrightarrow q$ » est vraie. Pensez à des proverbes comme « si les poules avaient des dents alors je serais pape », « si les poules avaient des dents alors je serais en train de lire un livre de maths ». Ces phrases sont vraies, même si leur apport est faible !*

Équivalence $p \Longleftrightarrow q$

$p \Longleftrightarrow q$ est vraie si, et seulement si, les deux propositions sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

❶ Propriétés des connecteurs

non (non p) = p

non (p ou q) = (non p) et (non q)

non (p et q) = (non p) ou (non q)

($p \Longrightarrow q$) = [(non p) ou q]

non ($p \Longrightarrow q$) = [p et (non q)]

☞ *La négation d'une implication n'est donc pas une implication.*

($p \Longrightarrow q$) = [(non q) $\Longrightarrow$ (non p)]

☞ *Cette seconde implication est la* **contraposée** *de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.*

($p \Longleftrightarrow q$) = [($p \Longrightarrow q$) et ($q \Longrightarrow p$)]

☞ *Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.*

❶ Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

le quantificateur universel $\forall$

$$\forall x \quad \text{signifie : pour tout } x\,;$$

le quantificateur existentiel $\exists$

$$\exists\, x \quad \text{signifie : il existe au moins un } x.$$

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x,y)$$
$$\exists\, x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x,y)$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\quad \forall x \in E \quad \exists\, y \in E \quad p(x,y) \quad$ y dépend de x.

Dans l'écriture $\quad \exists\, y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x,y) \quad$ y est indépendant de x.

Négation

La négation de ≪ $\forall x \in E \quad x$ vérifie p ≫ est ≪ $\exists\, x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ≫.

La négation de ≪ $\exists\, x \in E \quad x$ vérifie p ≫ est ≪ $\forall x \in E \quad x$ ne vérifie pas p ≫.

❶ Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $p \Longrightarrow q$, alors on peut conclure que q est vraie.

☞ *Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.*

Examinons une ancienne publicité ; « Si vous n'êtes pas moderne, vous n'êtes pas client de la Société Générale ».

Elle se formalise par l'implication : non moderne $\Longrightarrow$ non client. On passe à la forme affirmative en prenant la contraposé : client $\Longrightarrow$ moderne.

Quel est l'intérêt de cette formulation pour un publicitaire ?

Tout d'abord des lecteurs vont se tromper et penser moderne $\Longrightarrow$ client, ce qui serait injurieux pour les clients des autres banques, mais ça n'a pas été dit.

D'autre part, la transcription d'une forme négative à une forme affirmative augmente l'adhésion au message.

Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on a démontré $p \Longrightarrow q$, on peut dire qu'on a fait l'analyse du problème. On dit que p est une **condition suffisante** pour que q soit vraie.

Quand on a démontré $q \Longrightarrow p$, on peut dire qu'on a fait la synthèse du problème. On dit que p est une **condition nécessaire** pour que q soit vraie.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction. On rejette alors p et on conclut que p est vraie.

☞ *Comme vous partez de non p, ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.*

Il y a 3000 ans, les Grecs ont démontré que $\sqrt{2}$ était irrationnel. C'est la première victoire de la raison sur l'intuition dans l'histoire de l'humanité. En effet, pour eux, tous les nombres étaient des fractions et pourtant ils connaissaient la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.

Aujourd'hui, la démonstration est un raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'on peut écrire $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme réduite. Cela entraîne que $2a^2 = b^2$. b^2 est donc pair et cela entraîne que b est pair, soit $b = 2b'$. On a donc $2a^2 = 4b'^2$, soit $a^2 = 2b'^2$. On en déduit que a est pair ainsi que a.
Or a et b ne peuvent pas être tous les deux pairs sinon la fraction ne serait pas sous forme réduite.

On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse initiale formulée et donc à conclure que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Disjonction des cas

Elle est basée sur :

$$[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (\text{ non } p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$$

Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas,

– un exemple est une illustration, mais ne démontre rien,

– un contre-exemple est une démonstration que la proposition est fausse.

Raisonnement par récurrence

■ Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n.

Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication $E(k) \Longrightarrow E(k+1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

■ Ce principe a diverses variantes, par exemple :

si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication

$$[\, E(0) \text{ et } E(1) \text{ et } \ldots \text{ et } E(k)\,] \Longrightarrow E(k+1)$$

est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

Il peut y avoir aussi des récurrences descendantes. En voici un bel exemple issu du domaine politique.

Il y a plusieurs années, un parlementaire avait remarqué que la dernière année de vie était la plus coûteuse pour l'Assurance Maladie. Donc supprimons la dernière année de vie. Mais le raisonnement recommence. Et en bout de parcours l'Assurance maladie n'a plus de dépenses. Mais elle n'a plus de recettes non plus !

1.2 Calculs algébriques

❶ Sommes et produits

■ Notations

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, considérons une famille d'éléments $a_1, \ldots, a_n$.

On note cette famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, la somme des termes $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ou $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$, le produit des termes $\prod_{i=1}^{n} a_i$ ou $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$.

■ Quelques propriétés

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i+y_i)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}y_i \quad ; \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i)=k\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i \ ;$$

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i\,y_i)=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}x_i\times\prod_{1\leqslant i\leqslant n}y_i \quad ; \quad \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(kx_i)=k^n\prod_{1\leqslant i\leqslant n}x_i \ ;$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}x_{ij}=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant p}x_{ij}\Big)=\sum_{1\leqslant j\leqslant p}\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_{ij}\Big)$$

❶ Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ \text{ si } q\neq 1 \qquad ; \qquad \sum_{k=0}^{n}q^k=n+1\ \text{ si } q=1.$$

❶ Coefficients binomiaux

■ Définition

Si $0\leqslant k\leqslant n$, on définit :

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $n!$ (lire : factorielle n) est le produit des n premiers nombres entiers. On pose $0!=1$.

Sinon, on pose $\binom{n}{k}=0$.

■ Propriétés

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \quad ; \quad \binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \quad ; \quad \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

❶ Triangle de Pascal

Sachant que $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ la dernière propriété permet de calculer de proche en proche tous les nombres $\binom{n}{k}$. On obtient ainsi le tableau cidessous appelé triangle de Pascal où le nombre $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la ligne n et de la colonne k :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	$\boxed{35}$ +	$\boxed{21}$	7	1	
8	1	8	28	56	70	$\boxed{56}$	28	8	1

1.3 Vocabulaire des ensembles

❶ Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Avec une ou deux parties

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de E, on définit :

■ Le **complémentaire** de A dans E (traduction ensembliste du NON) :

$$\overline{A} = \{x \in E \ ; \ x \notin A\}.$$

■ L'**intersection** de A et de B (traduction ensembliste du ET) :

$$A \cap B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes.

■ La **réunion** de A et de B (traduction ensembliste du OU) :

$$A \cup B = \{x \in E \ ; \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.

Systéme complet

Un système complet, ou partition, d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E.

❶ Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

■ Complémentaire

$$\overline{E} = \emptyset \quad ; \quad \overline{\emptyset} = E \quad ; \quad \overline{\overline{A}} = A \quad ; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}.$$

■ Lois de de Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad ; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

■ Réunion

$$A \cup B = B \cup A \quad ; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup A = A \quad ; \quad A \cup \emptyset = A \quad ; \quad A \cup E = E.$$

■ Intersection

$$A \cap B = B \cap A \quad ; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap A = A \quad ; \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad ; \quad A \cap E = A.$$

■ Réunion et intersection

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

❶ Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

☞ *Attention, le couple (b, a) est différent du couple (a, b), sauf si $a = b$.*

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ ; \ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.