

Daniel Fredon | Alexis Brès
Bérangère Godde | Jean-Noël Beury

FORMULAIRE

MATHÉMATIQUES
PHYSIQUE-CHIMIE
INFORMATIQUE

MPSI-MP2I
MP-MPI

8^e édition

DUNOD

l'intelligence

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-083744-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	ix
Mathématiques	1
1. Analyse	1
1.1 Les nombres réels	1
1.2 Limites et continuité	1
1.3 Dérivation	3
1.4 Suites numériques	5
1.5 Intégration	7
1.6 Développements limités	11
1.7 Espaces vectoriels normés	12
1.8 Séries numériques	15
1.9 Suites et séries de fonctions	16
1.10 Séries entières	18
1.11 Équations différentielles linéaires	20
1.12 Calcul différentiel et optimisation	24
2. Algèbre générale	27
2.1 Raisonnement et vocabulaire ensembliste	27
2.2 Ensembles	29
2.3 Applications	31
2.4 Relations	33
2.5 Calculs algébriques	34
2.6 Fonctions circulaires et trigonométrie	35
2.7 Nombres complexes	37
2.8 Structures algébriques usuelles	42
2.9 Arithmétique dans \mathbb{Z}	45
2.10 Polynômes	48
2.11 Fractions rationnelles	52

3. Algèbre linéaire et multilinéaire	54
3.1 Systèmes linéaires	54
3.2 Espaces vectoriels	56
3.3 Applications linéaires	59
3.4 Matrices	62
3.5 Déterminants	65
3.6 Espaces préhilbertiens réels	67
3.7 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	69
3.8 Endomorphismes d'un espace euclidien	72
4. Calcul des probabilités	73
4.1 Dénombrement	73
4.2 Probabilités	74
4.3 Variables aléatoires	77
Physique	84
1. Étude du signal	84
1.1 Propagation du signal	84
1.2 Interférences et diffraction	86
2. Électronique	87
2.1 Circuits électriques	87
2.2 Circuits linéaires du premier ordre	91
2.3 Oscillateurs libres et forcés	92
2.4 Filtrage linéaire	94
2.5 Logique séquentielle et stabilité (MPI)	96
2.6 Électronique numérique	98
3. Optique	101
3.1 Optique géométrique	101
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses	104
3.3 Déphasage et chemin optique	106
3.4 Les sources lumineuses	108
3.5 Les détecteurs de lumière	109
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses	111
3.7 Interférences à N ondes (MP)	112
3.8 Interféromètres	113

4. Mécanique	114
4.1 Cinématique d'un point	114
4.2 Dynamique du point	118
4.3 Étude énergétique du point	120
4.4 Dynamique de particules chargées	123
4.5 Moment cinétique du point	123
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	125
4.7 Cinématique et dynamique du solide	128
4.8 Référentiels non galiléens – cinématique	131
4.9 Référentiels non galiléens – dynamique	133
4.10 Lois de Coulomb du frottement solide	135
5. Thermodynamique	136
5.1 Description d'un système à l'équilibre	136
5.2 Changement d'état d'un corps pur	137
5.3 Transformations d'un système thermodynamique	139
5.4 Premier et second principes	140
5.5 Machines thermiques	143
5.6 Systèmes ouverts (MP)	144
5.7 Diffusion thermique	146
6. Électromagnétisme	152
6.1 Action d'un champ magnétique	152
6.2 Induction, auto-induction et couplage	153
6.3 Conversion de puissance électromécanique	155
6.4 Conservation de la charge électrique	156
6.5 Distributions de charge et champ électrostatique	159
6.6 Propriétés du champ électrostatique	161
6.7 Champs électrostatiques de distributions particulières	164
6.8 Analogie pour le champ de gravitation	166
6.9 Dipôles électriques	167
6.10 Champs magnétostatiques	169
6.11 Dipôles magnétiques	172
6.12 Équations de Maxwell	174
7. Ondes électromagnétiques	177
7.1 Les équations de propagation des champs	177

vi **Table des matières**

7.2 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	177
7.3 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	179
7.4 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	182
7.5 Dipôle rayonnant	185
8. Mécanique quantique	186
8.1 Introduction	186
8.2 Fonction d'onde	187
8.3 Particule libre	188
8.4 États stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux	190
9. Éléments de physique statistique	192
9.1 Le facteur de Boltzmann	192
9.2 Statistique sur le système	193
9.3 Équpartition de l'énergie	194
Chimie	197
1. Transformations de la matière : Aspects thermodynamiques	197
1.1 Système physico-chimique	197
1.2 Transformation chimique d'un système	200
1.3 Premier principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	203
1.4 Deuxième principe de la thermodynamique appliqué aux transformations physico-chimiques	205
2. Transformations de la matière : Aspects cinétiques	208
3. Constitution de la matière	212
3.1 Structure des entités chimiques	212
3.2 Relations entre structure et propriétés physiques macroscopiques	214

4. État solide	216
4.1 Modèle du cristal parfait	216
4.2 Types de cristaux	219
5. Transformations chimiques en solutions aqueuses	221
5.1 Réactions acide-base	221
5.2 Réactions de précipitation	224
5.3 Réactions d'oxydo-réduction	225
5.4 Corrosion humide ou électrochimique	235
Informatique	237
1. Programmation en Python	237
1.1 Type. Liste. Fonction	237
1.2 Représentation graphique	243
1.3 Terminaison, Correction, Complexité	243
1.4 Algorithmes. Recherche dans une liste. Recherche par dichotomie	245
1.5 Lecture et écriture de fichiers	246
1.6 Matrices de pixels et images	247
1.7 Pile. File	251
1.8 Récursivité	252
1.9 Tris	253
1.10 Algorithme glouton	257
1.11 Graphes	258
1.12 Recherche du plus court chemin	263
1.13 Programmation dynamique	267
1.14 Intelligence artificielle	269
2. Bases de données	277
Annexe A : Formulaire de trigonométrie	283
1. Angles associés	283
2. Formules d'addition	283
3. Formules de duplication	283
4. Formules de linéarisation	284
5. Transformation de sommes en produits	284
6. Expressions en fonction de $t = \tan(a/2)$	284
7. Équations trigonométriques	284

viii **Table des matières**

Annexe B : Champs scalaires – champs vectoriels	285
1. Coordonnées cartésiennes	285
2. Propriétés	285
3. Coordonnées cylindriques	286
4. Coordonnées sphériques	287
Annexe C : Unités et constantes fondamentales	288
1. Unités du système international	288
2. Constantes fondamentales	289
3. Ordres de grandeur	290
Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques	291
1. Signal 1 : rampe	291
2. Signal 2 : triangle	291
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	291
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	291
5. Signal 5 : porte	292
6. Signal 6 : impulsion	292
Annexe E : Classification périodique	293
Annexe F : Constantes chimiques	296
1. Constantes acido-basiques	296
2. Potentiels standards rédox	297
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	298
Index des mathématiques	299
Index de la physique	303
Index de la chimie	308
Index de l'informatique	310

Avant-propos

Ce formulaire s'adresse aux étudiants des classes préparatoires scientifiques de MPSI, MP2I puis de MP, MPI.

Cette huitième édition corrigée est conforme aux nouveaux programmes 2021-2022.

Pour chaque paragraphe, vous trouverez :

- la mention ❶ ou ❷ qui indique si c'est une notion de première ou de deuxième année ;
- parfois une indication MP2I, MPSI, MP ou MPI pour indiquer une notion spécifique au programme de telle ou telle filière.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, physique, chimie, informatique. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin de ce formulaire, un index vous permettra d'accéder rapidement à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire, en quelque sorte un anxiolytique sans les effets secondaires. Mais vous risquez toutefois une certaine accoutumance : quand vous aurez commencé à vous en servir, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépas, ne l'oubliez pas).

Bon travail et bon apprentissage !

Les auteurs

Les auteurs des parties de physique et chimie remercient Fabrice Dalier et Lucas Henry pour leur relecture et leurs conseils.

Mathématiques

1. Analyse

1.1 Les nombres réels

① Parties denses dans \mathbb{R}

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie A est dense dans \mathbb{R} si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

① Borne supérieure

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A .

$M = \sup A$ si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si, et seulement si, pour tous a, b de X tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$.

1.2 Limites et continuité

① Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

① Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

1

Relations de comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur I , et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I , ou extrémité de I .

• Définitions

➤ On dit que f est *dominée* par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leq A |g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0 .

Notation : $f = O(g)$ ou $f \leq g$.

Si g ne s'annule pas sur J , cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée sur J .

➤ On dit que f est *négligeable* devant g , ou que g est prépondérant devant f , au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour tout x de J .

Notation : $f = o(g)$ ou $f \ll g$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

➤ On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de x_0 , si on a $f - g = o(g)$.

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , cela signifie :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.

La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence. En particulier, si on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

• Exemples fondamentaux

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x} \quad \text{où } \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$


Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha \ll x^\beta \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0.$$

• Propriétés des fonctions équivalentes

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

 Lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.

Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

• **Équivalents classiques**

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad ;$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

1.3 Dérivation

1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0 . On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

4 [1] Mathématiques

① Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

f est strictement monotone sur I , dérivable en $f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

① Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

① Égalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

① Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leq f' \leq M$, alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si $|f'| \leq K$, alors, pour tous x et x' de $]a, b[$,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

① Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a , alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a .

1 Fonction convexe

f est convexe sur I :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

1 Fonction convexe dérivable

Si f est deux fois dérivable sur I :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

1.4 Suites numériques

1 Suite convergente

La suite (u_n) est convergente vers l si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0$$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

1 Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq x_n \leq v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l , alors la suite (x_n) est convergente vers l .

1 Suite extraite

La suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n) .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

6 [1] Mathématiques

Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels ou complexes, on peut extraire une sous-suite convergente.

1 Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$.

1 Suites adjacentes

(u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(u_n) est croissante ;

(v_n) est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leq v_n$ pour tout n , alors elles convergent vers l_1 et l_2 . Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$.

Somme des n premiers termes :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$$

1 Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = q u_n.$$

Terme général : $u_n = u_0 q^n$.

Somme des n premiers termes :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$
$$= n u_0 \quad \text{si } q = 1.$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

1 Suites arithmético-géométriques

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n + b .$$

Si $a = 1$, elle est arithmétique de raison b .

Si $a \neq 1$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a .

1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1 .

L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2. On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ (E).

1 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

• Limite éventuelle

Si (u_n) converge vers $l \in I$ et si f est continue en l , alors $f(l) = l$.

• Cas f croissante

Si f est croissante sur I , alors la suite (u_n) est monotone.

La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante. Mais vous devez le démontrer, par récurrence bien sûr.

• Théorème du point fixe

Si $f(I) \subset I$ et si f est contractante, alors l'équation $f(x) = x$ a une solution unique l dans I .

Toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l .

1.5 Intégration

1 Valeur absolue

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx .$$

1 Intégrales et ordre

- Si $a < b$, et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- Si f est continue et positive sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

1 Sommes de Riemann

Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

1 Intégration par parties

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I , et a et b des réels de I .

1 Intégration par changement de variable

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

u de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f continue sur $[a, b]$.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I , x_0 et x des points de I . On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

où $P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$

est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;

et $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ est le reste intégral d'ordre n .

②

Fonction intégrable

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe

$\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge

$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge

f intégrable sur $[a, +\infty[$

$\int_a^b |f(t)| dt$ converge

f intégrable sur $[a, b]$

②

Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

• Comparaison

Supposons $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

– Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

– Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

• Domination

Si $f(x) = O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f .

• Équivalence

Si $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

②

Situations de référence

• Pour $a > 0$, $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[a, +\infty[\iff \alpha > 1$.

• Pour $\alpha > 0$, $e^{-\alpha x}$ intégrable sur $[0, +\infty[$.

• $\frac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $]0, a]$ $\iff \alpha < 1$.

• $\ln x$ intégrable sur $]0, 1]$.

② Théorème de convergence dominée

(f_n) fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , continues par morceaux sur I .
 (f_n) converge simplement sur I vers f continue par morceaux sur I ,
il existe une fonction g continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur I , telle que pour tout entier n , on ait $|f_n| \leq g$ (hypothèse de domination),
 \implies les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

② Théorème d'intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur I , telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

$\implies f$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

② Intégrales à paramètre (existence et continuité)

On considère I et J des intervalles de \mathbb{R} ,

f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} .

On suppose :

- f continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction φ , intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ , telle que, pour tout x de J , on ait $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in J \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur J .

② Intégrales à paramètre (dérivabilité)

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur $J \times I$, avec :

- f continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ intégrable sur I ,

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction φ intégrable sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^+ telle que, pour tout x de J , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.

Alors la fonction g est de classe C^1 sur J et vérifie :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

1.6 Développement limités

1 Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n . Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

1 Développement limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

12 [1] Mathématiques

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

1.7 Espaces vectoriels normés

②

Norme

Une norme sur E est une application N de E dans \mathbb{R} qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \implies x = 0$
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- (3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

②

Normes équivalentes

Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\forall x \in E$:

$$\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$$

Toute suite qui converge vers l pour une norme converge aussi vers l pour l'autre norme.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

②

Voisinage

Une partie V est un voisinage de $a \in E$ s'il existe une boule ouverte centrée en a et incluse dans V .

②

Ouvert

• Une partie A de E est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B(a, r_a) \subset A.$$

• Un point a est un point intérieur de A si A est un voisinage de a .

L'ensemble des points intérieurs de A est l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A . On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

②

Fermé

• Une partie A est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

• a est un point adhérent à A si toute boule $B(a, r)$, avec $r > 0$, contient un point de A . L'ensemble des points adhérents à A est l'adhérence \bar{A} de A . On a $A \subset \bar{A}$. Si $\bar{A} = E$, on dit que A est dense dans E .

• Une partie A est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de A qui converge dans E , la limite appartient à A .

• L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

②

Frontière

La frontière d'une partie A est l'ensemble $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

C est l'ensemble des points a tels que toute boule $B(a, r)$ avec $r > 0$ contient au moins un vecteur de A et un vecteur qui n'appartient pas à A .

②

Caractérisation séquentielle de la continuité

Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que, pour toute suite (u_n) qui converge vers a , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

②

Caractérisation topologique de la continuité

f est continue sur D si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) de E .

② Fonction lipschitzienne

- Une fonction f de D dans F est lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si :

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$
- Si $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.

① - ② Continuité uniforme

- f de $D \subset E$ dans F est uniformément continue sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$
- Si f est lipschitzienne sur D , alors f est uniformément continue sur D .

② Application linéaire continue

- Si f est linéaire de E dans F , les propositions suivantes sont équivalentes :
 - f est continue sur E ;
 - f est continue en 0 ;
 - f est uniformément continue ;
 - $\exists k \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq k \|x\|.$
- Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

② Compact

- Une partie A de E est une partie compacte ou est un compact si, de toute suite d'éléments de A , on peut extraire une sous-suite convergente dans A .
- Un fermé inclus dans un compact est un compact.
- Tout compact est fermé et borné.
- Si E est de dimension finie, on a :

$$A \text{ compact} \iff A \text{ fermé et borné.}$$

② Fonction continue sur un compact

- Soit f une fonction continue de E dans F et A un compact de E .
- f est uniformément continue sur A (théorème de Heine).
 - $f(A)$ est un compact de F .

② Partie connexe par arcs

- Une partie A de E est connexe par arcs si, pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe une

fonction continue f de $[0, 1]$ dans A telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

- Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs.
- Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.
- **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie connexe, a et b deux vecteurs de A .

Pour tout réel x compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $x = f(c)$.

1.8 Séries numériques

② Série : convergence

Une série $\sum u_n$ converge si la suite $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge.

Une suite (u_n) converge \iff la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

② Convergence absolue

Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente; mais la réciproque est fautive.

② Comparaison de deux séries à termes positifs

$\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge;
 $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

② Cas de deux séries à termes positifs équivalents

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

Ce théorème n'est pas vrai pour des séries qui ne sont pas de signe constant.

② Séries de Riemann

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2 Séries géométriques

$$\sum_{n=0}^{+\infty} az^n = a \frac{1}{1-z} \cdot$$

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$
 convergence (absolue) si, et seulement si, $|z| < 1$

2 Série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$z \in \mathbb{C}$

2 Règle de d'Alembert

Soit u_n une série à termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.

Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

2 Comparaison série-intégrale

Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , alors la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$ converge.

1.9 Suites et séries de fonctions

2 Convergence simple d'une suite de fonctions

La suite (f_n) converge simplement sur A vers une fonction f , de A dans F , si :

$$\forall x \in A \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

$\|\cdot\|$ est la norme dans A

2 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

convergence uniforme \implies convergence simple.