

Maurice Kibler

Licence

Fiches et exercices corrigés de mathématiques

Licence en alternance ou professionnelle ou
en sciences physiques



ellipses

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Nombres complexes | 1 |
| I | Fiche 1 : représentation cartésienne d'un complexe | 1 |
| 1 | Définition d'un nombre complexe | 1 |
| 2 | Structure de corps pour \mathbb{C} | 1 |
| 3 | Conjugué d'un nombre complexe | 2 |
| 4 | Module d'un nombre complexe | 3 |
| 5 | Interprétation géométrique d'un nombre complexe | 3 |
| II | Fiche 2 : représentations polaires d'un complexe | 3 |
| 1 | Représentation trigonométrique | 4 |
| 2 | Formules d'Euler | 4 |
| 3 | Représentation exponentielle | 5 |
| 4 | Intérêt des représentations polaires et cartésiennes | 5 |
| III | Exercices corrigés | 7 |
| 2 | Décomposition en éléments simples | 23 |
| I | Fiche 1 : division euclidienne de polynômes | 23 |
| 1 | Théorème 1 (division de polynômes) | 23 |
| 2 | Méthodes pour la division | 24 |
| II | Fiche 2 : décomposition sur \mathbb{C} | 24 |
| 1 | Théorème 2 (décomposition en éléments simples) | 24 |
| 2 | Règle pratique | 25 |
| III | Fiche 3 : décomposition sur \mathbb{R} | 27 |
| 1 | De la décomposition sur \mathbb{C} à celle sur \mathbb{R} | 27 |
| 2 | Règle pratique | 28 |
| IV | Exercices corrigés | 30 |
| 3 | Trigonométries | 49 |
| I | Fiche 1 : trigonométrie sphérique | 49 |
| 1 | Définition des fonctions circulaires | 49 |
| 2 | Propriétés élémentaires des fonctions circulaires | 51 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Formules d'addition des fonctions circulaires | 51 |
| 4 | Formules de linéarisation des fonctions circulaires | 53 |
| 5 | Linéarisation de $\cos^2 a$, $\sin^2 a$ et $\sin a \cos a$ | 53 |
| 6 | Corollaire des formules de linéarisation | 54 |
| 7 | Formules de l'arc moitié | 54 |
| 8 | Dérivées des fonctions circulaires | 55 |
| 9 | Tableaux de variations des fonctions circulaires | 55 |
| 10 | Séries entières des fonctions circulaires | 55 |
| 11 | Application aux développements limités | 57 |
| 12 | Formules d'Euler et de Moivre | 57 |
| 13 | Fonctions inverses des fonctions circulaires | 58 |
| II | Fiche 2 : trigonométrie hyperbolique | 59 |
| 1 | Définition des fonctions hyperboliques | 59 |
| 2 | Propriétés élémentaires des fonctions hyperboliques | 59 |
| 3 | Formules d'addition des fonctions hyperboliques | 60 |
| 4 | Formules de linéarisation des fonctions hyperboliques | 60 |
| 5 | Linéarisation de $\cosh^2 a$, $\sinh^2 a$ et $\sinh a \cosh a$ | 61 |
| 6 | Corollaire des formules de linéarisation | 61 |
| 7 | Formules de l'argument moitié | 61 |
| 8 | Dérivées des fonctions hyperboliques | 62 |
| 9 | Tableaux de variations des fonctions hyperboliques | 62 |
| 10 | Séries entières des fonctions hyperboliques | 62 |
| 11 | Application aux développements limités | 63 |
| 12 | Analogues des formules d'Euler et de Moivre | 63 |
| 13 | Fonctions inverses des fonctions hyperboliques | 64 |
| 14 | Relations entre fonctions hyperboliques et circulaires | 65 |
| III | Exercices corrigés | 66 |
| 4 | Calcul différentiel et intégral | 77 |
| I | Fiche 1 : calcul différentiel | 77 |
| 1 | Dérivée d'une fonction d'une variable | 77 |
| 2 | Séries de Taylor et de Maclaurin | 82 |
| 3 | Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables | 83 |
| 4 | Différentielle d'une fonction | 85 |
| 5 | Forme différentielle | 86 |
| II | Fiche 2 : calcul intégral | 87 |
| 1 | Primitive | 87 |
| 2 | Intégrale de Riemann | 89 |
| 3 | Propriétés de l'intégrale de Riemann | 89 |
| 4 | Intégrale de Riemann impropre | 90 |
| 5 | Intégrale sur un intervalle symétrique | 90 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Théorème (de la moyenne) | 91 |
| 7 | Méthodes d'intégration | 91 |
| III | Exercices corrigés | 100 |
| 5 | Équations différentielles | 131 |
| I | Fiche 1 : généralités et théorèmes | 131 |
| II | Fiche 2 : équations du premier ordre | 132 |
| 1 | Cas général | 132 |
| 2 | Équation à coefficients constants | 133 |
| III | Fiche 3 : équations du second ordre | 134 |
| 1 | Cas général | 134 |
| 2 | Équation à coefficients constants | 136 |
| IV | Fiche 4 : autres équation différentielles | 139 |
| 1 | Équation d'Euler | 139 |
| 2 | Équation de Bernoulli | 140 |
| V | Exercices corrigés | 140 |
| 6 | Séries de Fourier | 165 |
| I | Fiche 1 : séries trigonométriques | 166 |
| 1 | Définition | 166 |
| 2 | Critère d'Abel | 166 |
| 3 | Corollaire | 167 |
| II | Fiche 2 : séries de Fourier | 168 |
| 1 | Théorème (Dirichlet et Jordan) | 168 |
| 2 | Fondamental et harmoniques | 169 |
| 3 | Coefficients de Fourier | 170 |
| 4 | Fonction génératrice | 171 |
| III | Fiche 3 : théorème de Bessel et Parseval | 173 |
| 1 | Le théorème | 173 |
| 2 | Le théorème en termes d'énergie | 174 |
| IV | Exercices corrigés | 176 |
| 7 | Transformation de Fourier | 207 |
| I | Fiche 1 : généralités | 208 |
| 1 | Définition | 208 |
| 2 | Coefficients de Fourier et transformée de Fourier | 209 |
| 3 | Propriétés | 209 |
| II | Fiche 2 : transformation de Fourier dans L^1 | 210 |
| 1 | Espace L^1 | 210 |
| 2 | Théorème (existence dans L^1) | 211 |
| 3 | Corollaire | 212 |

| | | |
|----------|---|------------|
| III | Fiche 3 : transformation de Fourier dans L^2 | 212 |
| | 1 Espace L^2 | 212 |
| | 2 Théorème (existence dans L^2) | 213 |
| | 3 Théorème (Parseval et Plancherel) | 213 |
| | 4 Corollaire | 214 |
| IV | Fiche 4 : transformation de Fourier dans S | 215 |
| | 1 Espace S | 215 |
| | 2 Théorème (existence dans S) | 215 |
| | 3 Formule de dérivation en ν | 215 |
| | 4 Formule de dérivation en t | 216 |
| V | Fiche 5 : convolution et Fourier | 217 |
| | 1 Définition | 217 |
| | 2 Propriétés | 219 |
| | 3 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ et S | 220 |
| | 4 Tables de transformées de Fourier de fonctions | 221 |
| VI | Annexe : transformation en ondelettes | 221 |
| VII | Exercices corrigés | 224 |
| 8 | Transformation de Laplace | 253 |
| I | Fiche 1 : généralités | 253 |
| | 1 Transformée de Laplace bilatère | 253 |
| | 2 Transformée de Laplace unilatère | 254 |
| | 3 Transformation en z | 254 |
| | 4 Importance de la transformée de Laplace bilatère | 256 |
| | 5 Notation | 257 |
| | 6 Transformées de Laplace usuelles | 257 |
| II | Fiche 2 : propriétés élémentaires | 258 |
| | 1 Propriété 1 (linéarité) | 258 |
| | 2 Propriété 2 (changement d'échelle) | 259 |
| | 3 Propriété 3 (translation en t) | 259 |
| | 4 Propriété 4 (translation en s) | 259 |
| | 5 Propriété 5 (dérivation en s) | 260 |
| | 6 Propriété 6 (théorème des sauts) | 260 |
| | 7 Corollaire | 261 |
| | 8 Formules de la valeur initiale et de la valeur finale | 261 |
| III | Fiche 3 : fonction semi-périodique | 262 |
| | 1 Définition | 262 |
| | 2 Théorème (transformée de Laplace et semi-périodicité) | 262 |
| IV | Fiche 4 : tables de transformées de Laplace | 264 |
| | 1 Tables de transformées de Laplace bilatères | 264 |
| | 2 Transformées de Laplace et théorème du retard | 265 |

| | | | |
|-----------|---|---|------------|
| | 3 | Table de transformées en z | 265 |
| V | | Fiche 5 : convolution et Laplace | 269 |
| | 1 | Définition | 269 |
| | 2 | Convolution de deux fonctions causales | 269 |
| | 3 | Propriétés | 269 |
| | 4 | Théorème (image d'un produit de convolution) | 270 |
| VI | | Fiche 6 : équations différentielles | 271 |
| | 1 | Cas de la transformation de Laplace bilatère | 271 |
| | 2 | Cas de la transformation de Laplace unilatère | 274 |
| | 3 | Système d'équations différentielles | 277 |
| VII | | Fiche 7 : lien avec l'analyse de Fourier | 278 |
| | 1 | Détermination de transformées de Fourier | 278 |
| | 2 | Détermination de coefficients de Fourier | 278 |
| VIII | | Exercices corrigés | 279 |
| 9 | | Sur la théorie du signal | 307 |
| I | | Généralités | 307 |
| | 1 | Signal continu | 308 |
| | 2 | Signal discret | 308 |
| | 3 | Lien signal analogique - signal numérique | 308 |
| II | | Énergie et puissance | 309 |
| | 1 | Énergie | 309 |
| | 2 | Puissance | 309 |
| III | | Les transformations | 309 |
| | 1 | Série de Fourier | 309 |
| | 2 | Transformation de Fourier | 312 |
| | 3 | Transformation en ondelettes | 315 |
| | 4 | Transformation de Laplace | 316 |
| | 5 | Transformation en z | 317 |
| IV | | La convolution | 318 |
| | 1 | Signal continu | 318 |
| | 2 | Signal discret | 318 |
| | 3 | Notion de filtre | 319 |
| V | | Les distributions | 320 |
| 10 | | Courbes et intégrales curvilignes | 321 |
| I | | Fiche 1 : paramétrisation d'une courbe | 321 |
| | 1 | Paramétrisation dans \mathbb{R}^2 | 321 |
| | 2 | Paramétrisation dans \mathbb{R}^3 | 323 |
| II | | Fiche 2 : longueur d'un arc de courbe | 323 |
| | 1 | Longueur d'un arc dans \mathbb{R}^2 | 323 |

| | | | |
|--------------------------------|---|--|------------|
| | 2 | Longueur d'un arc dans \mathbb{R}^3 | 327 |
| III | | Fiche 3 : intégrales curvilignes | 328 |
| | 1 | Intégrale curviligne dans \mathbb{R}^2 | 328 |
| | 2 | Intégrale curviligne dans \mathbb{R}^3 | 332 |
| IV | | Exercices corrigés | 334 |
| 11 Intégrales multiples | | | 353 |
| I | | Fiche 1 : intégrales doubles | 353 |
| | 1 | Intégrale double en cartésiennes | 353 |
| | 2 | Changement de variables dans une intégrale double . . . | 354 |
| | 3 | Intégrale double en polaires | 355 |
| | 4 | Cas particulier de variables non liées | 356 |
| | 5 | Application au calcul d'aires | 357 |
| II | | Fiche 2 : intégrales triples | 359 |
| | 1 | Intégrale triple en cartésiennes | 359 |
| | 2 | Changement de variables dans une intégrale triple . . . | 360 |
| | 3 | Intégrale triple en cylindriques et en sphériques | 361 |
| | 4 | Application au calcul de volumes | 363 |
| III | | Exercices corrigés | 364 |
| 12 Analyse vectorielle | | | 379 |
| I | | Fiche 1 : champs scalaire et vectoriel | 379 |
| | 1 | Champ scalaire dans \mathbb{R}^3 | 379 |
| | 2 | Champ vectoriel dans \mathbb{R}^3 | 380 |
| II | | Fiche 2 : produits scalaire, vectoriel et mixte | 381 |
| | 1 | Produit scalaire dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 | 381 |
| | 2 | Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 | 382 |
| | 3 | Produit mixte dans \mathbb{R}^3 | 383 |
| III | | Fiche 3 : gradient d'une fonction | 383 |
| | 1 | Définition | 383 |
| | 2 | Gradient d'une somme | 383 |
| | 3 | Gradient d'un produit | 384 |
| | 4 | Lien gradient-différentielle | 384 |
| IV | | Fiche 4 : divergence d'un vecteur | 384 |
| | 1 | Définition | 384 |
| | 2 | Divergence d'une somme | 384 |
| | 3 | Divergence du produit d'un scalaire par un vecteur . . . | 384 |
| V | | Fiche 5 : rotationnel d'un vecteur | 385 |
| | 1 | Définition | 385 |
| | 2 | Rotationnel d'une somme | 385 |
| | 3 | Rotationnel du produit d'un scalaire par un vecteur . . | 385 |

| | | | |
|----------------------------|--|--|------------|
| | 4 | Formules diverses | 386 |
| VI | Fiche 6 : laplaciens | | 386 |
| | 1 | Laplacien d'une fonction ou champ scalaire | 386 |
| | 2 | Laplacien d'un vecteur ou champ vectoriel | 387 |
| VII | Fiche 7 : changements de coordonnées | | 387 |
| | 1 | Cas général | 387 |
| | 2 | Coordonnées cartésiennes | 390 |
| | 3 | Coordonnées cylindriques | 391 |
| | 4 | Coordonnées sphériques | 392 |
| | 5 | Autres coordonnées | 393 |
| | 6 | Notations symboliques | 393 |
| VIII | Fiche 8 : circulation et flux | | 394 |
| | 1 | Formule du rotationnel | 394 |
| | 2 | Formule de la divergence | 396 |
| IX | Exercices corrigés | | 397 |
| 13 Calcul matriciel | | | 415 |
| I | Fiche 1 : définitions et opérations sur les matrices | | 415 |
| | 1 | Généralités sur les matrices | 415 |
| | 2 | Matrices associées à une matrice donnée | 416 |
| | 3 | Multiplication d'une matrice par un scalaire | 417 |
| | 4 | Somme de deux matrices | 417 |
| | 5 | Produit de deux matrices | 417 |
| | 6 | Inverse d'une matrice carrée | 418 |
| | 7 | Matrices semblables | 418 |
| | 8 | Produit scalaire de deux vecteurs | 419 |
| | 9 | Norme d'un vecteur | 419 |
| | 10 | Angle de deux vecteurs | 420 |
| | 11 | Règles pour la somme et le produit de matrices | 420 |
| II | Fiche 2 : matrices carrées particulières | | 421 |
| | 1 | Matrice symétrique, matrice antisymétrique | 421 |
| | 2 | Matrice hermitique | 421 |
| | 3 | Matrice orthogonale | 421 |
| | 4 | Matrice unitaire | 421 |
| III | Fiche 3 : trace et déterminant d'une matrice | | 422 |
| | 1 | Trace d'une matrice carrée | 422 |
| | 2 | Déterminant d'une matrice carrée | 422 |
| IV | Fiche 4 : calcul de l'inverse d'une matrice | | 425 |
| | 1 | Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité | 425 |
| | 2 | Calcul pratique de l'inverse d'une matrice | 425 |
| V | Fiche 5 : systèmes linéaires | | 427 |

| | | |
|------|--|------------|
| 1 | Transformation linéaire | 427 |
| 2 | Système $m \times m$ | 429 |
| 3 | Changement de base | 430 |
| VI | Fiche 6 : éléments propres d'une matrice | 432 |
| 1 | Généralités | 432 |
| 2 | Détermination des valeurs propres | 433 |
| 3 | Détermination des vecteurs propres | 434 |
| 4 | Cas d'une matrice hermitique | 434 |
| 5 | Théorème (Cayley et Hamilton) | 435 |
| VII | Fiche 7 : réduction d'un endomorphisme | 438 |
| 1 | Interprétation de la notion de matrice | 438 |
| 2 | Diagonalisation d'une matrice | 440 |
| VIII | Fiche 8 : puissance et exponentielle | 443 |
| 1 | Puissance d'une matrice | 443 |
| 2 | Exponentielle d'une matrice | 444 |
| IX | Fiche 9 : application aux systèmes différentiels | 445 |
| 1 | Généralités | 445 |
| 2 | Procédure de calcul | 447 |
| X | Exercices corrigés | 448 |
| | Bibliographie | 483 |
| | Index | 485 |