Maurice Kibler

Licence

Fiches et exercices corrigés de mathématiques

Licence en alternance ou professionnelle ou en sciences physiques

ellipses

Chapitre 1

Nombres complexes

I Fiche 1 : représentation cartésienne d'un complexe

1 Définition d'un nombre complexe

Tout nombre complexe (ou simplement complexe) z est de la forme

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

où i est tel que $\mathrm{i}^2 = -1$ (on écrit aussi symboliquement $\mathrm{i} = \sqrt{-1} \;\Rightarrow\; \mathrm{i}^2 = -1$) ; i est appelé l'imaginaire pur ; x, appelée partie réelle de z, est notée aussi $\Re(z)$ et y, appelée partie imaginaire de z, est notée aussi $\Im(z)$. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Le nombre complexe nul $z = 0$ correspond à $x = y = 0$. Deux nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ sont égaux ($z = z'$) si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

2 Structure de corps pour $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être muni de deux lois de composition interne

- une loi d'addition + telle que

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad z' = x' + \mathrm{i}y' \quad \Rightarrow \quad z + z' = x + x' + \mathrm{i}(y + y')$$

- une loi de multiplication × telle que

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad z' = x' + \mathrm{i}y' \quad \Rightarrow \quad z \times z' = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + yx')$$

(on omet en général le signe × et donc $z \times z'$ se note zz'). Les lois + et × confèrent à $\mathbb{C}$ une structure de corps commutatif, le corps des complexes, qui contient le corps des réels $\mathbb{R}$ comme cas particulier ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Cette définition montre que l'on calcule avec les nombres complexes comme avec les nombres réels sauf que l'on utilise $\mathrm{i}^2 = -1$ dans les calculs. C'est ainsi que l'on a

$$z + z' = x + \mathrm{i}y + x' + \mathrm{i}y' = x + x' + \mathrm{i}(y + y')$$

et

$$zz' = (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') = xx' + x\mathrm{i}y' + \mathrm{i}yx' + \mathrm{i}y\mathrm{i}y' = xx' - yy' + \mathrm{i}(xy' + yx')$$

Noter que

$$\Re(z + z') = x + x', \quad \Im(z + z') = y + y'$$
$$\Re(zz') = xx' - yy', \quad \Im(zz') = xy' + yx'$$

3 Conjugué d'un nombre complexe

Le conjugué (ou conjugué complexe) d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est par définition

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

Autrement dit

$$z = x + \mathrm{i}y \ \Rightarrow \ \bar{z} = x - \mathrm{i}y \ \Rightarrow \ \Re(z) = \Re(\bar{z}) = x, \quad \Im(z) = -\Im(\bar{z}) = y$$

Comme cas particulier, pour $x = 0$ et $y = 1$ on a

$$\bar{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$$

La conjugaison complexe est une opération réciproque puisque

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

Si $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, alors on a

$$\overline{z + z'} = x + x' - \mathrm{i}(y + y') = \bar{z} + \overline{z'}, \quad \overline{zz'} = xx' - yy' - \mathrm{i}(xy' + yx') = \bar{z}\overline{z'}$$

Noter que la partie réelle $x = \Re(z)$ et la partie imaginaire $y = \Im(z)$ d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ peuvent se mettre sous la forme

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

en fonction de z et de son conjugué complexe $\bar{z}$.

4 Module d'un nombre complexe

Par définition, le module $|z|$ du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Or

$$z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 + y^2$$

Donc

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Noter que $|\bar{z}| = |z|$.

Comme conséquence de la définition de $|z|$, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$

soit

$$\frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$$

en cartésiennes.

5 Interprétation géométrique d'un nombre complexe

Les parties réelle x et imaginaire y du nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ peuvent être considérées comme les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point M dans le plan $\mathbb{R}^2$ (dit alors plan complexe) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On dit que z est exprimé dans la représentation cartésienne (ou au moyen d'un diagramme d'Argand).

Le point M est appelé image du nombre complexe z et z est appelé affixe de M. Par exemple, l'imaginaire pur i est associé au point $(0, 1)$: le point $(0, 1)$ est l'image du nombre complexe i et i est l'affixe du point $(0, 1)$.

Noter que les images d'un complexe et de son complexe conjugué sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

II Fiche 2 : représentations polaires d'un complexe

Il existe deux représentations polaires d'un nombre complexe : la représentation trigonométrique et la représentation exponentielle qui font intervenir toutes deux un angle polaire.

1 Représentation trigonométrique

Le point M de coordonnées (x, y) peut être repéré par ses coordonnées polaires (ρ, φ)

$$\rho = |\vec{OM}|, \quad \varphi = (\vec{i}, \vec{OM})$$

où $(\vec{i}, \vec{OM})$ désigne l'angle orienté entre l'axe des x et $\vec{OM}$ (on rappelle que O est l'origine des coordonnées dans le plan complexe). On a les formules suivantes de passage des coordonnées polaires (ρ, φ) aux coordonnées cartésiennes (x, y) et réciproquement

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ peut donc s'écrire

$$z = \rho \cos\varphi + \mathrm{i}\rho \sin\varphi$$

sous forme trigonométrique. Noter que

$$\rho = |z| \;\Rightarrow\; x = |z| \cos\varphi, \quad y = |z| \sin\varphi$$

2 Formules d'Euler

Le cas du nombre complexe

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

de module $|z| = 1$, joue un rôle important. On montre dans le chapitre 3 que

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

où e est la base des logarithmes népériens ($\ln \mathrm{e} = 1$). Il est clair que l'image du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ est le point M du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1 centré à l'origine des coordonnées O dans le plan ramené à un système d'axes rectangulaires $\vec{Ox}$ et $\vec{Oy}$) tel que $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \varphi$. Par addition puis soustraction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$, on obtient les formules d'Euler

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} \end{aligned}$$

On donne dans les tables 1.1 et 1.2 la valeur de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ pour quelques valeurs remarquables de φ.

φ	0	$\pm\frac{\pi}{4}$ (ou $\mp 7\frac{\pi}{4}$)	$\pm\frac{\pi}{2}$ (ou $\mp 3\frac{\pi}{2}$)	$\pm 3\frac{\pi}{4}$ (ou $\mp 5\frac{\pi}{4}$)	$\pm\pi$
$e^{i\varphi}$	1	$\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$	$\pm i$	$\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$	-1

TABLE 1.1 – Valeurs de $e^{i\varphi}$ pour quelques valeurs de $\varphi = k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

φ	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm 2\frac{\pi}{3}$	$\pm 5\frac{\pi}{6}$
$e^{i\varphi}$	$\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$	$\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$	$\pm i$	$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}\pm i}{2}$

TABLE 1.2 – Valeurs de $e^{i\varphi}$ pour quelques valeurs de $\varphi = k\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 Représentation exponentielle

Comme corollaire de la formule donnant $e^{i\varphi}$ en fonction de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, le nombre complexe général

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

s'écrit

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

sous forme exponentielle avec

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

où ρ est le module de z et φ l'angle polaire (en radians et défini modulo 2π) qui est appelé l'argument de z, noté $\arg(z)$. Noter que

$$z = \rho e^{i\varphi} \;\Leftrightarrow\; \bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$$

4 Intérêt des représentations polaires et cartésiennes

En résumé et à titre de comparaison, on donne dans la table 1.3 la partie réelle et la partie imaginaire des complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ avec $z_k = x_k + iy_k$ pour $k = 1, 2$ et dans la table 1.4 le module et l'argument des complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ avec $z_k = \rho_k e^{i\varphi_k}$ pour $k = 1, 2$. Il apparaît clairement que les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires sont bien adaptées au calcul de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, respectivement.

	partie réelle	partie imaginaire
$z_1 + z_2$	$x_1 + x_2$	$y_1 + y_2$
$z_1 z_2$	$x_1 x_2 - y_1 y_2$	$x_1 y_2 + y_1 x_2$

TABLE 1.3 – Partie réelle et partie imaginaire des nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ avec $z_k = x_k + \mathrm{i} y_k$ pour $k = 1, 2$.

	module	argument
$z_1 + z_2$	$\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$\tan^{-1} \frac{\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2}{\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2}$
$z_1 z_2$	$\rho_1 \rho_2$	$\varphi_1 + \varphi_2$

TABLE 1.4 – Module et argument des nombres complexes $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ avec $z_k = \rho_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$ pour $k = 1, 2$.

Comme test simple, à partir de tables 1.3 et 1.4, pour $z_1 = z_2 = z$ avec $z = x + \mathrm{i}y = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, on (re)trouve que

$$\Re(z) = x, \quad \Im(z) = y, \quad \Re(z^2) = x^2 - y^2, \quad \Im(z^2) = 2xy$$
$$|z| = \rho, \quad \arg(z) = \varphi, \quad |z^2| = \rho^2, \quad \arg(z^2) = 2\varphi$$

La représentation exponentielle est particulièrement utile pour exprimer le module et l'argument du produit ou quotient de deux nombres complexes ; en effet, pour $z_1 = \rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ et $z_2 = \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$, on a

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = \rho_1 \rho_2, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$$

modulo 2π pour $\varphi_1 + \varphi_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2$.

Il faut noter les formules utiles

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ |z^n| = |z|^n$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C} \ (z = x + \mathrm{i}y = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \ : \ \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} \ \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} \\ \frac{1}{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{cases}$$

qui se démontrent aussi bien en cartésiennes qu'en polaires.

III Exercices corrigés

Exercice 1

Vérifier que

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{2n} = (-1)^n, \quad \mathrm{i}^{2n+1} = (-1)^n\mathrm{i}$$

où i est l'imaginaire pur et n un entier relatif ($n \in \mathbb{Z}$).

Solution

Ces relations sont une conséquence directe de $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 2

Calculer

$$A = (1+\mathrm{i})^2, \quad B = (1+\mathrm{i})^3, \quad C = (x-\mathrm{i}y)(x+\mathrm{i}y)$$

où i est l'imaginaire pur.

Solution

On a

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 \;\Rightarrow\; A = 2\mathrm{i} \\ B & = & (1+\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i} - 2 \;\Rightarrow\; B = 2(-1+\mathrm{i}) \\ C & = & x^2 - (\mathrm{i}y)^2 \;\Rightarrow\; C = x^2 + y^2 \end{array}$$

où l'on a appliqué les règles d'addition et de multiplication des nombres réels et utilisé $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 3

Soit le nombre complexe

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+a^2})} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+a^2})}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Calculer $|z|$, z^2 et $d = |z|^2 - |z^2|$.

Solution

Des calculs simples conduisent à $|z| = \sqrt[4]{1+a^2}$, $z^2 = 1 + \mathrm{i}|a|$ et $d = 0$.

Exercice 4

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $z = z_1 + z_2$ où $z_k = \rho_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_k}$ avec $k = 1, 2$. En déduire le module et l'argument de z en fonction des modules ρ_k et des arguments φ_k avec $k = 1, 2$. Tester les résultats obtenus en faisant $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ et $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Solution

On a

$$z = \rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} + \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = \rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2 + \mathrm{i}(\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2)$$

d'où

$$\Re(z) = \rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2, \quad \Im(z) = \rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2$$

On en déduit que

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

De plus

$$\arg(z) = \tan^{-1} \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \;\Rightarrow\; \arg(z) = \tan^{-1} \frac{\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2}{\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2}$$

En faisant $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ et $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, les résultats obtenus donnent $|z| = 2\rho$ et $\arg(z) = \varphi$ que l'on obtient directement à partir de $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 2\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Exercice 5

Mettre le nombre complexe

$$z = \frac{1}{1+\mathrm{i}}$$

sous les formes cartésienne, trigonométrique et exponentielle.

Solution

Il faut donc trouver x, y, ρ et φ tels que

$$z = x + \mathrm{i}y = \rho\cos\varphi + \mathrm{i}\rho\sin\varphi = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

On a

$$z = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = -y = \frac{1}{2}$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

et finalement

$$z = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$