TOUT EN FICHES

EXERCICES ET MÉTHODES DE

MATHÉMATIQUES LICENCE 1

2e ÉDITION

Myriam Maumy-Bertrand
Maître de conférences hors classe en mathématiques appliquées et habilitée à diriger des recherches à l'université de technologie de Troyes

Frédéric Bertrand
Professeur des universités en mathématiques appliquées à l'université de technologie de Troyes

Daniel Fredon
Maître de conférences en mathématiques appliquées

DUNOD

Illustration de couverture : © Yurkina Alexandra/shutterstock.com

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70% de nos livres en France et 25% en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084801-0

Table des matières

Remerciements V

1 Structures fondamentales 1
Fiche 1 Logique et raisonnement 2
Fiche 2 Langage des ensembles 4
Fiche 3 Applications 6
Fiche 4 Entiers naturels 8
Fiche 5 Groupes 9
Fiche 6 Anneaux et corps 11
Fiche 7 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ 12
Fiche 8 Nombres complexes 14
Fiche 9 Polynômes et fractions rationnelles 17
QCM 21
Vrai ou faux ? 33
Exercices 35

2 Algèbre linéaire 52
Fiche 1 Espaces vectoriels 53
Fiche 2 Espaces vectoriels de dimension finie 55
Fiche 3 Applications linéaires 58
Fiche 4 Applications linéaires particulières 62
Fiche 5 Calcul matriciel 63
Fiche 6 Matrices et applications linéaires 65
Fiche 7 Systèmes linéaires 68
Fiche 8 Déterminants 70
QCM 73
Vrai ou faux ? 86
Exercices 89

3 Bases fondamentales de l'analyse 113
Fiche 1 Nombres réels 114
Fiche 2 Généralités sur les fonctions numériques 116
Fiche 3 Limite d'une fonction 119
Fiche 4 Fonctions continues 122
Fiche 5 Fonctions dérivables 123
Fiche 6 Compléments sur les fonctions dérivables 125
Fiche 7 Fonctions logarithme népérien, exponentielle, puissances 127
Fiche 8 Fonctions trigonométriques et leurs réciproques 130
Fiche 9 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques 134
Fiche 10 Développements limités 136
Fiche 11 Courbes planes définies par $y = f(x)$ 140
QCM 144
Vrai ou faux ? 157
Exercices 159

4 Analyse 183
Fiche 1 Suites numériques 184
Fiche 2 Suites particulières 186
Fiche 3 Séries numériques 188

Fiche 4 Intégrales définies 190
Fiche 5 Calcul des primitives 192
Fiche 6 Équations différentielles du premier ordre 195
QCM 197
Vrai ou faux ? 211
Exercices 213

5 Analyse combinatoire et probabilités 239
Fiche 1 Analyse combinatoire 240
Fiche 2 Fonctions génératrices 243
Fiche 3 Compléments sur les séries 245
Fiche 4 Introduction aux probabilités 247
Fiche 5 Espaces probabilisés 249
Fiche 6 Probabilité conditionnelle et indépendance en probabilité 251
Fiche 7 Variables aléatoires réelles et discrètes 254
Fiche 8 Moments et fonctions génératrices d'une v.a. discrète 256
Fiche 9 Couples de v.a.d. Indépendance 259
Fiche 10 Lois discrètes usuelles 1 262
Fiche 11 Lois discrètes usuelles 2 267
QCM 270
Vrai ou faux ? 285
Exercices 288

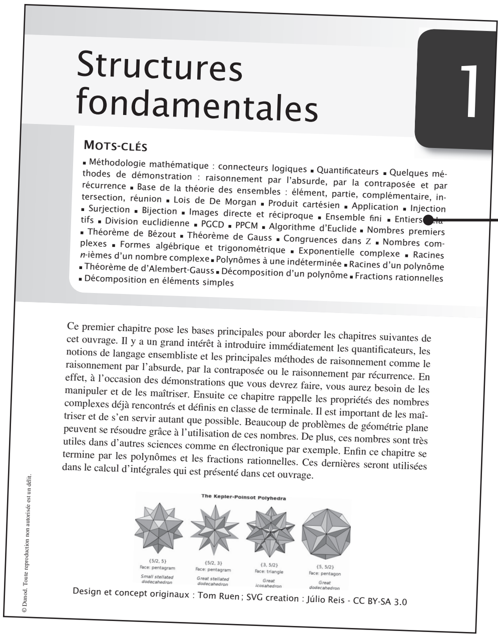
Index 307

Remerciements

Nous souhaitons ici remercier Marie Chion pour sa relecture attentive.

Que chacun y trouve son bonheur !

Comment utiliser



Structures fondamentales

1

Mots-clés

▪ Méthodologie mathématique : connecteurs logiques ▪ Quantificateurs ▪ Quelques méthodes de démonstration : raisonnement par l'absurde, par la contraposée et par récurrence ▪ Base de la théorie des ensembles : élément, partie, complémentaire, intersection, réunion ▪ Lois de De Morgan ▪ Produit cartésien ▪ Application ▪ Injection ▪ Surjection ▪ Bijection ▪ Images directe et réciproque ▪ Ensemble fini ▪ Entiers relatifs ▪ Division euclidienne ▪ PGCD ▪ PPCM ▪ Algorithme d'Euclide ▪ Nombres premiers ▪ Théorème de Bézout ▪ Théorème de Gauss ▪ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ▪ Nombres complexes ▪ Formes algébrique et trigonométrique ▪ Exponentielle complexe ▪ Racines n-ièmes d'un nombre complexe ▪ Polynômes à une indéterminée ▪ Racines d'un polynôme ▪ Théorème de d'Alembert-Gauss ▪ Décomposition d'un polynôme ▪ Fractions rationnelles ▪ Décomposition en éléments simples

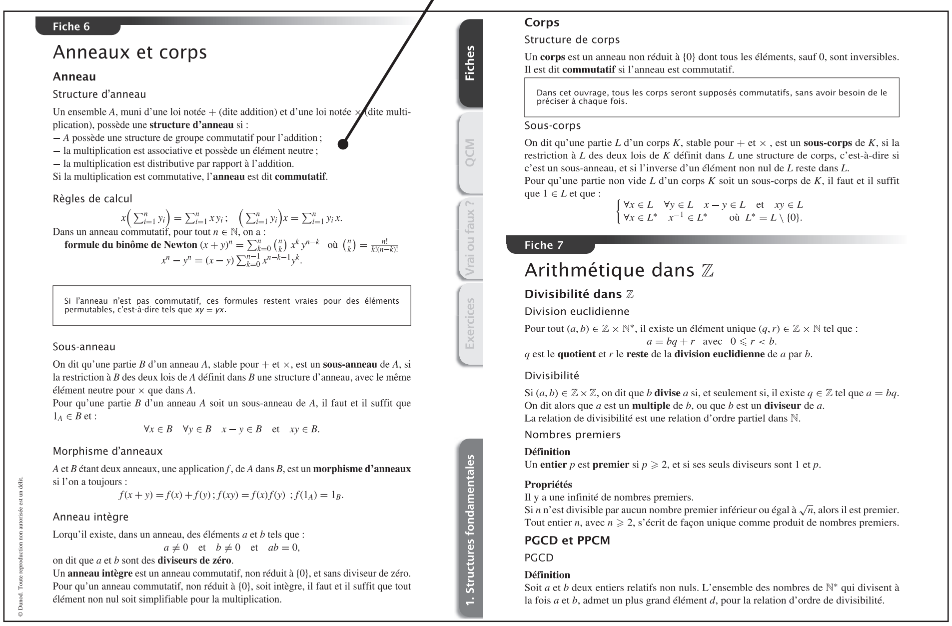
Ce premier chapitre pose les bases principales pour aborder les chapitres suivantes de cet ouvrage. Il y a un grand intérêt à introduire immédiatement les quantificateurs, les notions de langage ensembliste et les principales méthodes de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde, par la contraposée ou le raisonnement par récurrence. En effet, à l'occasion des démonstrations que vous devrez faire, vous aurez besoin de les manipuler et de les maîtriser. Ensuite ce chapitre rappelle les propriétés des nombres complexes déjà rencontrés et définis en classe de terminale. Il est important de les maîtriser et de s'en servir autant que possible. Beaucoup de problèmes de géométrie plane peuvent se résoudre grâce à l'utilisation de ces nombres. De plus, ces nombres sont très utiles dans d'autres sciences comme en électronique par exemple. Enfin ce chapitre se termine par les polynômes et les fractions rationnelles. Ces dernières seront utilisées dans le calcul d'intégrales qui est présenté dans cet ouvrage.

Design et concept originaux : Tom Ruen ; SVG creation : Júlio Reis - CC BY-SA 3.0

5 chapitres
et leurs mots-clés

Retrouvez des exercices supplémentaires sur la page associée à l'ouvrage sur dunod.com @

Des rappels de cours sous forme de fiches



Fiche 6

Anneaux et corps

Anneau

Structure d'anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée $+$ (dite addition) et d'une loi notée $\times$ (dite multiplication), possède une **structure d'anneau** si :
– A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;
– la multiplication est associative et possède un élément neutre ;
– la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Si la multiplication est commutative, l'**anneau** est dit **commutatif**.

Règles de calcul

$$x\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)=\sum_{i=1}^n x\,y_i\,;\quad \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)x=\sum_{i=1}^n y_i\,x.$$

Dans un anneau commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

formule du binôme de Newton $(x+y)^n=\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ où $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$x^n-y^n=(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

> Si l'anneau n'est pas commutatif, ces formules restent vraies pour des éléments permutables, c'est-à-dire tels que $xy=yx$.

Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-anneau** de A, si la restriction à B des deux lois de A définit dans B une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour $\times$ que dans A.
Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x-y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

Morphisme d'anneaux

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un **morphisme d'anneaux** si l'on a toujours :

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,;\,f(xy)=f(x)f(y)\;\;;f(1_A)=1_B.$$

Anneau intègre

Lorqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab=0,$$

on dit que a et b sont des **diviseurs de zéro**.
Un **anneau intègre** est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro.
Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

Fiches | QCM | Vrai ou faux ? | Exercices | 1. Structures fondamentales

Corps

Structure de corps

Un **corps** est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles.
Il est dit **commutatif** si l'anneau est commutatif.

> Dans cet ouvrage, tous les corps seront supposés commutatifs, sans avoir besoin de le préciser à chaque fois.

Sous-corps

On dit qu'une partie L d'un corps K, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-corps** de K, si la restriction à L des deux lois de K définit dans L une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.
Pour qu'une partie non vide L d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que $1 \in L$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L \quad x-y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* \quad x^{-1} \in L^* \qquad \text{où } L^*=L\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Fiche 7

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Division euclidienne

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, il existe un élément unique $(q,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que :

$$a=bq+r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Divisibilité

Si $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, on dit que b **divise** a si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a=bq$.
On dit alors que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a.
La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}$.

Nombres premiers

Définition
Un **entier** p est **premier** si $p \geqslant 2$, et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Propriétés
Il y a une infinité de nombres premiers.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors il est premier.
Tout entier n, avec $n \geqslant 2$, s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers.

PGCD et PPCM

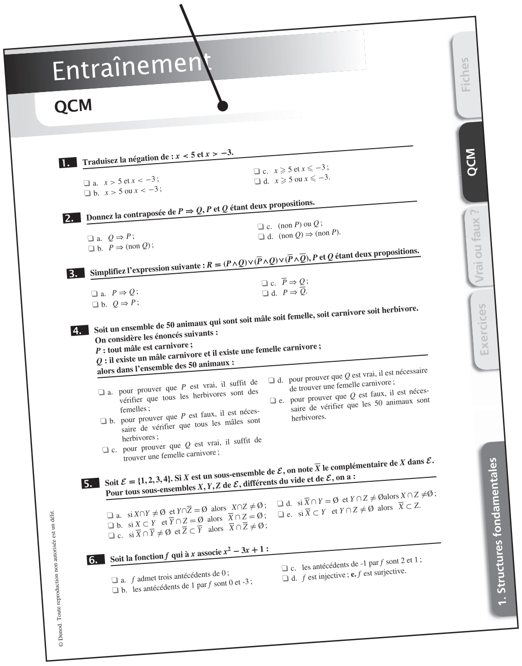
PGCD

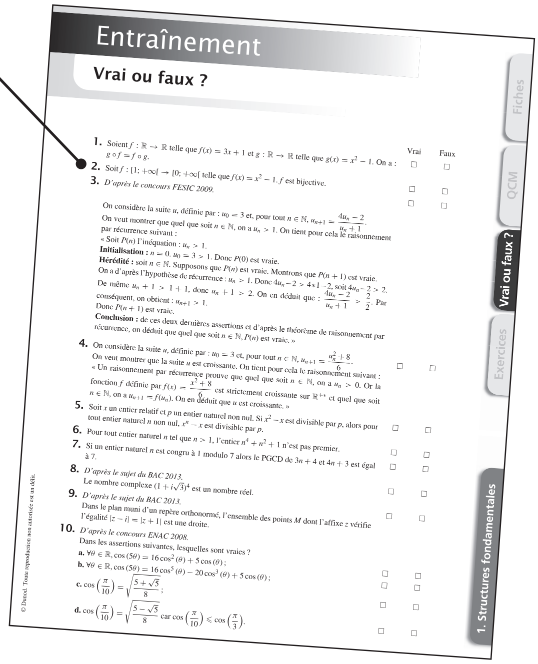
Définition
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de $\mathbb{N}^*$ qui divisent à la fois a et b, admet un plus grand élément d, pour la relation d'ordre de divisibilité.

cet ouvrage ?

Des QCM
pour s'auto-évaluer

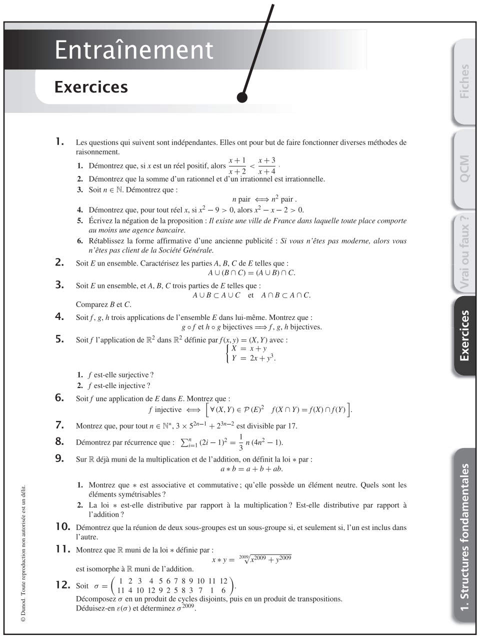
Des questions Vrai/Faux

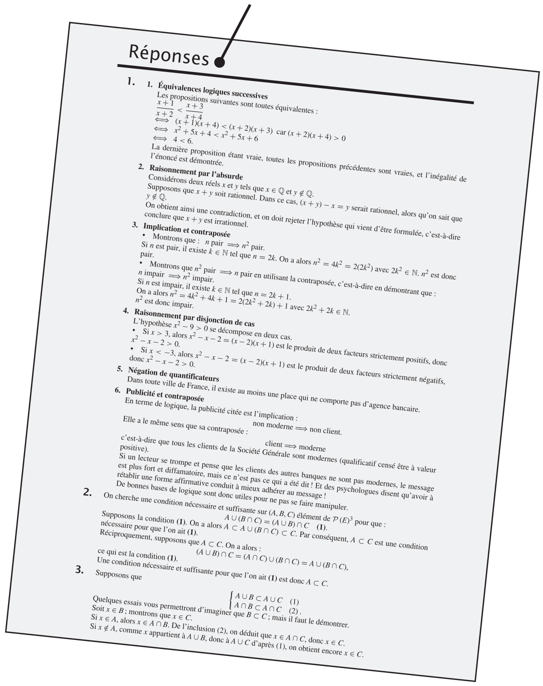




Des exercices pour s'entraîner

Toutes les réponses commentées



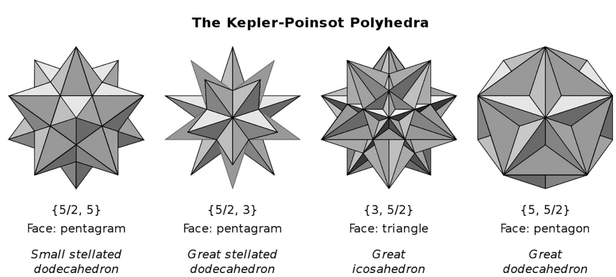


1 Structures fondamentales

MOTS-CLÉS

▪ Méthodologie mathématique : connecteurs logiques ▪ Quantificateurs ▪ Quelques méthodes de démonstration : raisonnement par l'absurde, par la contraposée et par récurrence ▪ Base de la théorie des ensembles : élément, partie, complémentaire, intersection, réunion ▪ Lois de De Morgan ▪ Produit cartésien ▪ Application ▪ Injection ▪ Surjection ▪ Bijection ▪ Images directe et réciproque ▪ Ensemble fini ▪ Entiers relatifs ▪ Division euclidienne ▪ PGCD ▪ PPCM ▪ Algorithme d'Euclide ▪ Nombres premiers ▪ Théorème de Bézout ▪ Théorème de Gauss ▪ Congruences dans $\mathbb{Z}$ ▪ Nombres complexes ▪ Formes algébrique et trigonométrique ▪ Exponentielle complexe ▪ Racines n-ièmes d'un nombre complexe ▪ Polynômes à une indéterminée ▪ Racines d'un polynôme ▪ Théorème de d'Alembert-Gauss ▪ Décomposition d'un polynôme ▪ Fractions rationnelles ▪ Décomposition en éléments simples

Ce premier chapitre pose les bases principales pour aborder les chapitres suivantes de cet ouvrage. Il y a un grand intérêt à introduire immédiatement les quantificateurs, les notions de langage ensembliste et les principales méthodes de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde, par la contraposée ou le raisonnement par récurrence. En effet, à l'occasion des démonstrations que vous devrez faire, vous aurez besoin de les manipuler et de les maîtriser. Ensuite ce chapitre rappelle les propriétés des nombres complexes déjà rencontrés et définis en classe de terminale. Il est important de les maîtriser et de s'en servir autant que possible. Beaucoup de problèmes de géométrie plane peuvent se résoudre grâce à l'utilisation de ces nombres. De plus, ces nombres sont très utiles dans d'autres sciences comme en électronique par exemple. Enfin ce chapitre se termine par les polynômes et les fractions rationnelles. Ces dernières seront utilisées dans le calcul d'intégrales qui est présenté dans cet ouvrage.



Design et concept originaux : Tom Ruen ; SVG creation : Júlio Reis - CC BY-SA 3.0

Logique et raisonnement

Logique binaire

Proposition logique

C'est un assemblage de lettres et de signes qui a une syntaxe correcte (le lecteur sait le lire), une sémantique correcte (le lecteur comprend ce qu'il lit) et qui a une seule valeur de vérité : vrai (V) ou faux (F).
Deux propositions seront considérées comme égales si elles ont toujours la même valeur de vérité.

Connecteurs logiques

À partir de propositions $p, q, \ldots$ on peut former de nouvelles propositions définies par des tableaux de vérité.

- Négation : non p (noté aussi $\neg p$)

p	non p
V	F
F	V

- Conjonction : p et q (noté aussi $p \wedge q$)
- Disjonction : p ou q (noté aussi $p \vee q$)
- Implication : $p \Longrightarrow q$
- Équivalence : $p \Longleftrightarrow q$

p	q	p et q	p ou q	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

> Le « ou » a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le sens exclusif qui figure dans « fromage ou dessert », c'est-à-dire du fromage ou bien du dessert mais pas les deux.

Propriétés des connecteurs

$$\text{non}(\text{non } p) = p$$
$$\text{non}(p \text{ ou } q) = (\text{non } p) \text{ et } (\text{non } q)$$
$$\text{non}(p \text{ et } q) = (\text{non } p) \text{ ou } (\text{non } q)$$
$$(p \Longrightarrow q) = \big[(\text{non } p) \text{ ou } q\big]$$
$$\text{non}(p \Longrightarrow q) = \big[p \text{ et } (\text{non } q)\big]$$

> La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

$$(p \Longrightarrow q) = \big[(\text{non } q) \Longrightarrow (\text{non } p)\big]$$

> Cette seconde implication est la contraposée de la première. Faites attention à l'ordre des propositions.

$$(p \Longleftrightarrow q) = \big[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (q \Longrightarrow p)\big]$$

Pour démontrer une équivalence, on démontre souvent une implication et sa réciproque.

Quantificateurs

Notation

Les quantificateurs servent à indiquer la quantité d'éléments qui interviennent dans une proposition. On utilise :

- le quantificateur universel $\forall$

$$\forall x \quad \text{signifie : pour tout } x\,;$$

- le quantificateur existentiel $\exists$

$$\exists x \quad \text{signifie : il existe au moins un } x.$$

Ordre

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad p(x, y)$$

$$\exists x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y).$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

Dans l'écriture $\quad \forall x \in E \quad \exists y \in E \quad p(x, y) \quad$ y dépend de x.

Dans l'écriture $\quad \exists y \in E \quad \forall x \in E \quad p(x, y) \quad$ y est indépendant de x.

Négation

La négation de « $\forall x \in E \quad x$ vérifie p » est « $\exists x \in E$ tel que x ne vérifie pas p ».

La négation de « $\exists x \in E \quad x$ vérifie p » est « $\forall x \in E \quad x$ ne vérifie pas p ».

Quelques méthodes de démonstration

Déduction

Si p est vraie et si l'on démontre $(p \Longrightarrow q)$, alors on peut conclure que q est vraie.

Si la démonstration d'une implication vous résiste, pensez à examiner la contraposée. Elle a le même sens, mais il est possible que sa démonstration soit plus facile.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que p est fausse et en déduire une contradiction.

Comme vous partez de « non p », ne vous trompez pas dans la négation, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs.

Disjonction des cas

Elle est basée sur le fait que :

$$\big[(p \Longrightarrow q) \text{ et } (\text{ non } p \Longrightarrow q)\big] \Longrightarrow q.$$

Exemples et contre-exemples

Beaucoup de propositions mathématiques sont de type universel. Dans ce cas :
– un exemple est une illustration, mais ne démontre rien ;
– un contre-exemple démontre que la proposition est fausse.

Raisonnement par récurrence

Voir Fiche 4.

Fiche 2

Langage des ensembles

Ensemble

Notion d'ensemble

La notion d'**ensemble** est considérée comme primitive. Retenons que la caractérisation d'un ensemble E doit être nette, c'est-à-dire que, pour tout **élément** x, on doit pouvoir affirmer : ou bien qu'il est dans E ($x \in E$), ou bien qu'il n'y est pas ($x \notin E$).
On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément.
E et F étant des ensembles, on dit que E est inclus dans F si, et seulement si, tous les éléments de E appartiennent aussi à F. On note $E \subset F$.
On dit aussi que E est une **partie** de F, ou que F contient E.
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$. Dire que $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.

Opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble. A et B étant des parties de l'ensemble E, on définit :
- le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = \{x \in E \quad \text{et} \quad x \notin A\}$;
- l'**intersection de deux parties** A et B : $A \cap B = \{x \in E\ ;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun élément commun à A et B, on dit que les parties A et B sont disjointes ;
- la **réunion de deux parties** A et B : $A \cup B = \{x \in E\ ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Ce « ou » a un sens inclusif c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B.
- la **différence** : $A \setminus B = \{x \in E\ ;\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$;
- la **différence symétrique** : $A \Delta B = \{x \in E\ ; x \in (A \text{ ou } B)\}$ et $\{x \in E\ ; x \notin (A \text{ et } B)\}$.

Par conséquent on a l'égalité suivante :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

$A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une, et une seule, des parties A et B.

Recouvrement, partition

- Un **recouvrement** d'une partie A de E est une famille de parties de E dont la réunion contient A.

→ Une **partition** d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E, deux à deux disjointes, et dont la réunion est E. Ce qui peut s'écrire mathématiquement de la façon suivante : une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E est une partition de E si :

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall (i,j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset). \end{cases}$$

Propriétés des opérations dans $\mathcal{P}(E)$

Pour toutes parties A, B et C de E, on a les propriétés qui suivent.

Complémentaire

$$\overline{E} = \emptyset; \quad \overline{\emptyset} = E; \quad \overline{\overline{A}} = A; \quad \text{si } A \subset B \text{ alors } \overline{B} \subset \overline{A}\,.$$

Lois de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Réunion

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C\,;$$
$$A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A; \quad A \cup E = E.$$

Intersection

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\,;$$
$$A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset; \quad A \cap E = A.$$

Réunion et intersection

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Produit cartésien

Le produit des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$.

Attention, le couple (b, a) est différent du couple (a, b), sauf si $a = b$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n.

Applications

Généralités

Définitions

Une **application** f est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F, et une relation qui permet d'associer à tout $x \in E$ un élément unique y dans F. On note ce dernier $f(x)$.
Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.
L'**application identité** de E est l'application de E dans E définie par $x \mapsto x$. On la note Id_E.

Restriction, prolongement

Soit f une application de A dans F, et g une application de B dans F.
Si $A \subset B$ et si, pour tout x de A, on a $f(x) = g(x)$, on dit que f est une **restriction** de g, ou que g est un **prolongement** de f.

Composition des applications

Soit E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.
La **composée** de f et de g, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G définie par :

$$x \mapsto g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

Injection, surjection, bijection

Application injective

Une application f de E dans F est dite **injective** (ou est une **injection**) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

Ne confondez pas avec la définition d'une application qui s'écrit :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x = x' \Longrightarrow f(x) = f(x')$$
$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'.$$

Application surjective

Une **application** f de E dans F est dite **surjective** (ou est une **surjection**) si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément x de E, soit :

$$\forall y \in F \quad \exists : x \in E \quad y = f(x).$$

Application bijective

Une application f de E dans F est dite **bijective** (ou est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, tout élément y de F est l'image d'un, et un seul, élément x de E.
À tout y de F, on associe ainsi un unique x dans E, appelé **antécédent** et noté $f^{-1}(y)$.
f^{-1} est la **bijection réciproque** de f. On a donc :

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

Ce qui entraîne $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.

Théorème

Soit f une application de E dans F, et g une application de F dans G. On a les implications qui suivent.
Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Image directe et image réciproque

Définitions

Soit f une application de E dans F.
Si $A \subset E$, on appelle **image directe de** A **par** f, la partie de F constituée par les images par f des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x)\ ;\ x \in A\}.$$

Si $B \subset F$, on appelle **image réciproque de** B, la partie de E constituée par les x dont l'image par f est dans B :

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E\ ;\ f(x) \in B\}.$$

Théorème

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\,;\ B_1 \subset B_2 \Longrightarrow \overset{-1}{f}(B_1) \subset \overset{-1}{f}(B_2)\,;$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\,;\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)\,;$$
$$\overset{-1}{f}(B_1 \cup B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cup \overset{-1}{f}(B_2)\,;\quad \overset{-1}{f}(B_1 \cap B_2) = \overset{-1}{f}(B_1) \cap \overset{-1}{f}(B_2).$$

Entiers naturels

Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est totalement ordonné et vérifie les trois propriétés suivantes :

1. toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément ;

2. toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément ;

3. $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

Raisonnement par récurrence

Soit $E(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier naturel n.
Si $E(0)$ est vrai, et si, quel que soit $k \geqslant 0$, l'implication $E(k) \Longrightarrow E(k+1)$ est vraie, alors l'énoncé $E(n)$ est vrai pour tout entier n.

Ensemble fini

Définition

Un ensemble E est **fini** s'il existe une bijection d'un intervalle $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{N}$ sur E.
Le nombre n est le **cardinal** (ou **nombre d'éléments**) de E. On le note $n = \text{card}\, E$.
Remarque : on convient que l'ensemble vide est fini, et que $\text{card}\, \emptyset = 0$.

Inclusion

Soit E un ensemble fini. Toute partie A de E est finie, et on a :

$$\text{card}\, A \leqslant \text{card}\, E.$$

Remarque : l'égalité des cardinaux ayant lieu si, et seulement si, $A = E$.

Application

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal, et f une application de E dans F.
On a l'équivalence des trois propriétés :

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective}.$$

Remarque : dans ce cas, pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer, soit que f est injective, soit que f est surjective.

Groupes

Loi de composition interne

Définition

Une **loi de composition interne** sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E. À un couple (x, y), on associe donc un élément, noté $x * y$, ou $x + y$, ou xy, . . ., appelé **composé de** x **et de** y.

Propriétés

➞ Une loi de composition interne $*$ sur E est :
– **associative** si :
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z);$$
– **commutative** si :
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x * y = y * x.$$
– Elle admet un **élément neutre** e si :
$$\exists\, e \in E \quad \forall x \in E \quad x * e = e * x = x.$$
Si l'élément neutre existe, il est unique.

➞ Un élément x est **inversible** (ou **symétrisable**) dans E, s'il existe $x' \in E$ (dit **inverse**, ou **symétrique**, de x) tel que :
$$x * x' = x' * x = e.$$
➞ Si $*$ et $\top$ sont deux lois de composition interne de E, on dit que $*$ est distributive par rapport à $\top$, si l'on a toujours :
$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

Groupe

Définitions

Un ensemble non vide G, muni d'une loi $*$, est un **groupe** si :
– la loi est associative ;
– il existe un élément neutre e ;
– tout élément de G possède un symétrique dans G.
Si, de plus, la loi est commutative, le groupe est dit **commutatif**, ou **abélien**.
Dans un groupe, tout élément est régulier (ou simplifiable), c'est-à-dire que l'on a toujours :
$$x * y = x * z \Longrightarrow y = z \quad ; \quad y * x = z * x \Longrightarrow y = z\,.$$
Généralement, un groupe est noté additivement ou multiplicativement. Le symétrique x' de x est alors noté $-x$ dans le premier cas, x^{-1} dans le second.

Sous-groupe

Définition
Une partie stable H d'un groupe G est un **sous-groupe de** G si la restriction à H de la loi de G définit dans H une structure de groupe.

Propriété caractéristique

Pour qu'une partie non vide H d'un groupe G soit un sous-groupe de G, il faut et il suffit que :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy \in H \quad \text{et} \quad x^{-1} \in H$$

ou encore :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy^{-1} \in H.$$

Propriété

L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de G.

Morphismes de groupes

Définitions

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement. Une application f, de G dans G', est un **morphisme de groupes** si, et seulement si :

$$\forall x \in G \quad \forall y \in G \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Si, de plus, f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de groupes**. Les deux groupes sont alors isomorphes.

Composition

Le composé de deux morphismes (resp. isomorphismes) de groupes est un **morphisme** (**resp. isomorphisme**) **de groupes**.

Image et noyau

Soit G et G' deux groupes notés multiplicativement, d'éléments neutres respectifs e et e', et f un morphisme de G dans G'. On a :

$$e' = f(e) \quad ; \quad f(x^{-1}) = \left[f(x)\right]^{-1}.$$

$f(G)$ est un sous-groupe de G' appelé l'**image** du morphisme f et noté $\operatorname{Im} f$.

$N = \overset{-1}{f}(\{e'\}) = \{x\,; \quad x \in G, f(x) = e'\}$ est un sous-groupe de G appelé le **noyau du morphisme** f et noté $\operatorname{Ker} f$.

f est injectif si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Exemples de groupe

$(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, le plus petit groupe pour l'addition qui contient $\mathbb{N}$.

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

Anneaux et corps

Anneau

Structure d'anneau

Un ensemble A, muni d'une loi notée $+$ (dite addition) et d'une loi notée $\times$ (dite multiplication), possède une **structure d'anneau** si :
— A possède une structure de groupe commutatif pour l'addition ;
— la multiplication est associative et possède un élément neutre ;
— la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
Si la multiplication est commutative, l'**anneau** est dit **commutatif**.

Règles de calcul

$$x\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x\, y_i\,; \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)x = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x.$$

Dans un anneau commutatif, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

formule du binôme de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

> Si l'anneau n'est pas commutatif, ces formules restent vraies pour des éléments permutables, c'est-à-dire tels que $xy = yx$.

Sous-anneau

On dit qu'une partie B d'un anneau A, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-anneau** de A, si la restriction à B des deux lois de A définit dans B une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour $\times$ que dans A.
Pour qu'une partie B d'un anneau A soit un sous-anneau de A, il faut et il suffit que $1_A \in B$ et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

Morphisme d'anneaux

A et B étant deux anneaux, une application f, de A dans B, est un **morphisme d'anneaux** si l'on a toujours :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,; f(xy) = f(x)f(y)\;\; ; f(1_A) = 1_B.$$

Anneau intègre

Lorqu'il existe, dans un anneau, des éléments a et b tels que :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab = 0,$$

on dit que a et b sont des **diviseurs de zéro**.
Un **anneau intègre** est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, et sans diviseur de zéro.
Pour qu'un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, soit intègre, il faut et il suffit que tout élément non nul soit simplifiable pour la multiplication.

Corps

Structure de corps

Un **corps** est un anneau non réduit à $\{0\}$ dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles. Il est dit **commutatif** si l'anneau est commutatif.

> Dans cet ouvrage, tous les corps seront supposés commutatifs, sans avoir besoin de le préciser à chaque fois.

Sous-corps

On dit qu'une partie L d'un corps K, stable pour $+$ et $\times$, est un **sous-corps** de K, si la restriction à L des deux lois de K définit dans L une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de L reste dans L.
Pour qu'une partie non vide L d'un corps K soit un sous-corps de K, il faut et il suffit que $1 \in L$ et que :

$$\begin{cases} \forall x \in L \quad \forall y \in L \quad x - y \in L \quad \text{et} \quad xy \in L \\ \forall x \in L^* \quad x^{-1} \in L^* \qquad \text{où} \;\; L^* = L \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Fiche 7

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Division euclidienne

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un élément unique $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b.

Divisibilité

Si $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on dit que b **divise** a si, et seulement si, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.
On dit alors que a est un **multiple** de b, ou que b est un **diviseur** de a.
La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}$.

Nombres premiers

Définition
Un **entier** p est **premier** si $p \geqslant 2$, et si ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Propriétés
Il y a une infinité de nombres premiers.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors il est premier.
Tout entier n, avec $n \geqslant 2$, s'écrit de façon unique comme produit de nombres premiers.

PGCD et PPCM

PGCD

Définition
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de $\mathbb{N}^*$ qui divisent à la fois a et b, admet un plus grand élément d, pour la relation d'ordre de divisibilité.

C'est le **plus grand commun diviseur** de a et de b. On le note PGCD (a, b), ou $a \vee b$.

Algorithme d'Euclide
Si q_1 et r_1 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, on a :

$$a \vee b = b \vee r_1.$$

On recommence avec b et r_1. Le dernier reste non nul de ce processus est le PGCD de a et de b.

Nombres premiers entre eux
Si PGCD $(a, b) = 1$, on dit que a et b sont **premiers entre eux**.
Soit $r = \dfrac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) un nombre rationnel. Si d désigne le PGCD de a et de b, on a $a = da'$ et $b = db'$, avec a' et b' premiers entre eux. On peut alors écrire $r = \dfrac{a'}{b'}$ (avec $b \neq 0$). C'est la forme irréductible de r.

PPCM

Définition
Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'ensemble des nombres de $\mathbb{N}^*$ qui sont multiples à la fois de a et de b, admet un plus petit élément m, pour la relation d'ordre de divisibilité.
C'est le **plus petit commun multiple** de a et de b. On le note PPCM (a, b) , ou $a \wedge b$.

Théorème

$$\text{PGCD}\,(a, b) \times \text{PPCM}\,(a, b) = |a\,b|.$$

Théorème de Bézout

Pour que deux entiers relatifs non nuls a et b soient premiers entre eux, il faut, et il suffit, qu'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$$au + bv = 1.$$

> On obtient u et v avec l'algorithme d'Euclide.

Théorème de Gauss

Soit a, b, c trois entiers relatifs tels que a divise bc, et a premier avec b. Alors a divise c.

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire dans $\mathbb{Z}$:

$$a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division par } n \iff n/(a-b)$$

se note $a \equiv b \pmod{n}$; lire : a **congru** à b **modulo** n.
On écrit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour désigner l'ensemble des classes ainsi formées par regroupement :

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \ ;\ a \equiv b \pmod{n}\}.$$

Propriétés algébriques de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Structure
Pour $n \geqslant 2$, l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni des deux lois :

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b} \;\; ; \;\; \overline{a}\times\overline{b}=\overline{a\times b}$$

est un anneau commutatif.

Éléments inversibles
Un élément $\overline{a}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible si, et seulement si, a et n sont premiers entre eux.

Cas particulier
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, n est premier.

Fiche 8

Nombres complexes

Forme algébrique

Définitions

Tout **nombre complexe** z s'écrit, de manière unique, sous la forme algébrique $z = x+\mathrm{i}y$ avec x et y réels, i étant un **nombre complexe particulier** tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Le réel x s'appelle la **partie réelle de** z, et se note $\mathrm{Re}\,(z)$.
Le réel y s'appelle la **partie imaginaire de** z, et se note $\mathrm{Im}\,(z)$.

Plan complexe

Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormal du plan.
L'application qui, à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, fait correspondre le point M de coordonnées (x, y) est une bijection. M est l'**image de** z, et z l'**affixe de** M.
L'**affixe du vecteur** $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ est le nombre complexe $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$.
Si z_A et z_B sont les affixes de A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
La somme des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs.

Conjugué d'un nombre complexe

Le **conjugué du nombre complexe** $z = x + \mathrm{i}y$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le nombre complexe $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.
Les images des nombres complexes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
On a les propriétés :

$$\overline{\overline{z}} = z \quad ; \quad \overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z} : \overline{z'} \quad ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \cdot$$

Forme trigonométrique

Module d'un nombre complexe

Le **module** de $z = x+\mathrm{i}y$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) est le nombre réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
On le note $|z|$, ou ρ, ou r.

Si M est l'affixe de z, $|z|$ est la longueur OM.
Le module d'un nombre complexe a les mêmes propriétés que la valeur absolue d'un nombre réel.

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous **forme trigonométrique** :
$$z = \rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \quad \text{avec} \quad \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$
$\rho = |z|$ est le module de z.
θ est un **argument** de z. On le note $\arg z$. Il est défini, modulo 2π, par :
$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}.$$

Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul

Les égalités suivantes ont lieu à $2k\pi$ près (avec $k \in \mathbb{Z}$)
$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'\,; \quad \arg(z^n) = n\arg z \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$
$$\arg(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^+\,; \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z\,; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'.$$

Exponentielle complexe

On convient de noter $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Formule de Moivre

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,$$
ce qui s'écrit, avec la notation précédente : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

Formules d'Euler

Pour tout réel x et tout entier n, on a :
$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\,; \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\,;$$
$$\cos nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2}\,; \quad \sin nx = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}.$$

Exponentielle complexe

Définition
On définit l'**exponentielle du nombre complexe** $z = x + \mathrm{i}y$ par :
$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$
Propriétés
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'};$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \left(\mathrm{e}^z\right)^n = \mathrm{e}^{nz}.$$
Si z est une constante complexe et t une variable réelle, on a :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{zt}\right) = z\,\mathrm{e}^{zt}.$$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \geqslant 1$. Soit U_n l'**ensemble des racines n-ièmes** de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On a :

$$U_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \quad \text{avec} \quad u_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2k\pi}{n} = (u_1)^k$$

et la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0$.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul $\rho\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)$ possède n racines n-ièmes :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

À partir de l'une d'entre elles, on peut les obtenir toutes en la multipliant par les éléments de U_n.

Cas particulier des racines carrées

Pour déterminer les racines carrées de $z = a + \mathrm{i}b$, il est plus commode de procéder par identification, c'est-à-dire de chercher les réels α et β tels que $(\alpha + \mathrm{i}\beta)^2 = a + \mathrm{i}b$.

L'égalité des parties réelles et des parties imaginaires donne :

$$\alpha^2 - \beta^2 = a \quad \text{et} \quad 2\alpha\,\beta = b\,.$$

L'égalité des modules conduit à :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On en déduit α^2 et β^2, puis α et β en utilisant le fait que $\alpha\,\beta$ est du signe de b.

> Ce calcul est utilisé lors de la résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

Transformations géométriques

$a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ et $b = b_1 + \mathrm{i}b_2$ sont deux nombres complexes donnés.

Translation

L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto z + b$, se traduit sur les images par la **translation** de vecteur $b_1\,\overrightarrow{u} + b_2\,\overrightarrow{v}$.

Similitude directe

Si $a \neq 1$, l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \mapsto az + b$, se traduit sur les images par la **similitude** de rapport $|a|$, d'angle $\arg a$, et dont le centre Ω, a pour affixe $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a}$ ·

Cette transformation est la composée, dans n'importe quel ordre, de la **rotation** de centre Ω et d'angle $\arg a$, et de l'**homothétie** de centre Ω et de rapport $|a|$.

Distances et angles

Avec deux points

Soit A et B deux points distincts, d'affixes respectifs z_A et z_B.

$|z_B - z_A|$ est la longueur AB ; $\arg\,(z_B - z_A)$ est une **mesure de l'angle** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$.

Avec trois points

Soit A, B et C trois points, deux à deux distincts, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C.

$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ a pour module AB/AC, et pour argument une **mesure de l'angle** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.

Applications

Alignement

Les points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \text{ est un réel.}$$

Orthogonalité

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si :

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est un imaginaire pur, un nombre complexe dont la partie réelle est nulle.

Triangle équilatéral

Le **triangle** ABC est **équilatéral**, de sens direct, si, et seulement si :

$$z_C - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A).$$

Triangle rectangle isocèle

Le **triangle** ABC est **rectangle** et **isocèle** en A si, et seulement si :

$$z_C - z_A = \pm\,\mathrm{i}\,(z_B - z_A).$$

Points cocycliques ou alignés

Soit A, B, C et D quatre points, deux à deux distincts, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D.
Ils sont **cocycliques** ou **alignés** si, et seulement si :

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) / \left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) \in \mathbb{R}.$$

Fiche 9

Polynômes et fractions rationnelles

Polynôme à une indéterminée

Définitions

Polynôme formel

Un **polynôme à une indéterminée**, à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, est une suite de valeurs a_i de $\mathbb{K}$, nulle à partir d'un certain rang p. Un tel polynôme se note P, ou $P(X)$:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p.$$

Les nombres a_i sont les **coefficients** du polynôme P.
Si $P \neq 0$, le plus grand entier p tel que $a_p \neq 0$ est le **degré du polynôme** P. On le note $\mathrm{d}^\circ P$, ou $\deg P$.
a_p est le **coefficient dominant** de P. Lorsque $a_p = 1$, le **polynôme** est dit **unitaire**, ou normalisé.
Pour le **polynôme nul** $P = 0$, on convient de poser $\mathrm{d}^\circ P = -\infty$.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée X, à coefficients dans $\mathbb{K}$, se note $\mathbb{K}[X]$.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Fonction polynomiale

$P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ étant un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, la **fonction polynomiale** associée à P est l'application $\widetilde{P}$, de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, définie par :