

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Intégration</b>	<b>5</b>
1.1. Un calcul d'intégrale . . . . .	6
1.2. Une inégalité (1) . . . . .	7
1.3. Une inégalité (2) . . . . .	7
1.4. Inégalité de Young . . . . .	8
1.5. Cas d'égalité dans le théorème de majoration . . . . .	12
1.6. Une inégalité (3) . . . . .	13
1.7. Inégalité de Van der Corput . . . . .	15
1.8. Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes . . . . .	17
1.9. Méthode des trapèzes pour une fonction convexe . . . . .	19
1.10. Recherche d'un minimum . . . . .	21
1.11. Recherche d'une borne inférieure . . . . .	22
1.12. Inégalité de Hardy . . . . .	24
1.13. Recherche d'un minimum . . . . .	25
1.14. Étude d'une suite . . . . .	26
1.15. Inégalité de Wirtinger . . . . .	27
1.16. Fonctions dont les deux premiers moments sont nuls . . . . .	29
1.17. Fonctions dont les $n$ premiers moments sont nuls . . . . .	30
1.18. Recherche d'orthogonal . . . . .	31
1.19. Méthode de Gauss . . . . .	32
1.20. Une somme de Riemann (1) . . . . .	34
1.21. Une somme de Riemann (2) . . . . .	35
1.22. Étude asymptotique des sommes de Riemann . . . . .	36
1.23. Découpage en morceaux de même aire . . . . .	38
1.24. Estimation d'une suite de coefficients binomiaux . . . . .	39
1.25. Lemme de Riemann-Lebesgue . . . . .	41
1.26. Deuxième formule de la moyenne . . . . .	43
1.27. Suites équiréparties : généralités . . . . .	45
1.28. Suites équiréparties : critère de Weyl . . . . .	47
1.29. Suites équiréparties : un exemple . . . . .	50
1.30. Calcul d'une intégrale . . . . .	50
1.31. Mesure du domaine d'annulation d'une fonction . . . . .	51
1.32. Limites de normes intégrales . . . . .	53
1.33. Équivalent d'une primitive . . . . .	54
1.34. Recherche de limite . . . . .	55
1.35. Équivalent des intégrales de Wallis . . . . .	56

1.36. Recherche d'un équivalent (1) . . . . .	57
1.37. Recherche d'un équivalent (2) . . . . .	58
1.38. Recherche d'un équivalent (3) . . . . .	60
1.39. Développement asymptotique (1) . . . . .	62
1.40. Développement asymptotique (2) . . . . .	64
1.41. Méthode de Laplace (1) . . . . .	66
1.42. Méthode de Laplace (2) . . . . .	69
1.43. Développement en série entière . . . . .	73
1.44. Lemme de Gronwall (1) . . . . .	76
1.45. Lemme de Gronwall (2) . . . . .	76
1.46. Moyenne spatiale . . . . .	77
1.47. Une équation intégrale (1) . . . . .	78
1.48. Une équation intégrale (2) . . . . .	79
1.49. Une équation intégrale (3) . . . . .	80
1.50. Une équation intégrale (4) . . . . .	81
1.51. Indice d'une courbe fermée . . . . .	83
1.52. Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	87

**Chapitre 2. Suites et séries de fonctions** **91**

2.1. Majoration sur une demi-droite . . . . .	92
2.2. Une décomposition en série de la valeur absolue . . . . .	94
2.3. Fonctions continues presque additives . . . . .	96
2.4. Contrôle uniforme de séries alternées . . . . .	97
2.5. Sommation au sens de Riemann . . . . .	99
2.6. Convergence uniforme des séries de Dirichlet . . . . .	102
2.7. Convergence d'une série trigonométrique . . . . .	104
2.8. Étude de la convergence d'une série de fonctions . . . . .	106
2.9. Suite ne convergeant uniformément sur aucun ouvert . . . . .	108
2.10. Continuité et convergence de fonctions . . . . .	110
2.11. Série normalement convergente de somme non dérivable . . . . .	111
2.12. Régularité d'une série trigonométrique . . . . .	112
2.13. Série de primitives successives . . . . .	113
2.14. Équivalent d'une série de fonctions . . . . .	114
2.15. Courbe de Bolzano . . . . .	117
2.16. Intersion série-intégrale . . . . .	121
2.17. Sur le théorème d'intégration d'une série de fonctions . . . . .	123
2.18. Polynômes de Bernstein . . . . .	125
2.19. Limites uniformes de polynômes strictement croissants . . . . .	128
2.20. Un théorème de Walsh . . . . .	130
2.21. Théorème de Chudnovsky . . . . .	131
2.22. Algèbre des fonctions presque périodiques . . . . .	133
2.23. Théorème de Korovkin (1953) . . . . .	136
2.24. Approximation de Laguerre . . . . .	138

2.25. Convergence d'une suite de polynômes . . . . .	140
2.26. Développement eulérien de la cotangente . . . . .	142
2.27. Produits infinis . . . . .	146
2.28. Identité de Jacobi . . . . .	148
2.29. Développement eulérien du sinus sur $\mathbb{C}$ . . . . .	152
2.30. Théorème de Dini . . . . .	156
2.31. Un théorème de point fixe . . . . .	158
2.32. Suite de fonctions lipschitziennes sur un compact . . . . .	160
2.33. Convergence uniforme de suites de fonctions convexes . . . . .	161
2.34. Théorème d'Ascoli . . . . .	162
2.35. Un cas particulier du théorème d'Ascoli . . . . .	165
2.36. Théorème de sélection de Helly . . . . .	166
2.37. Suite de fonctions d'un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^0([0, 1])$ . . . . .	167
2.38. Critère de convergence uniforme . . . . .	170

**Chapitre 3. Séries entières** **173**

3.1. Rayon de convergence (1) . . . . .	174
3.2. Rayon de convergence (2) . . . . .	174
3.3. Rayon de convergence (3) . . . . .	175
3.4. Rayon de convergence (4) . . . . .	176
3.5. Étude d'une série entière sur le cercle de convergence . . . . .	177
3.6. Le théorème d'Abel-Dirichlet . . . . .	180
3.7. Calcul de la somme d'une série entière . . . . .	183
3.8. Calcul de la somme de séries de fonctions . . . . .	184
3.9. Somme d'une série entière extraite . . . . .	186
3.10. Calcul d'une somme . . . . .	188
3.11. Calculs de sommes de séries alternées . . . . .	189
3.12. Développement en série entière des fractions rationnelles . . . . .	192
3.13. Signe des coefficients d'un développement en série entière . . . . .	194
3.14. Séries génératrices de deux suites récurrentes . . . . .	197
3.15. Partitions d'un entier en parts fixées . . . . .	199
3.16. Série génératrice du nombre de partitions de $n$ . . . . .	201
3.17. Signe des dérivées successives d'une fonction . . . . .	203
3.18. Développement en série entière (1) . . . . .	205
3.19. Développement en série entière (2) . . . . .	206
3.20. Développement en série entière (3) . . . . .	208
3.21. Limite simple de polynômes à coefficients positifs . . . . .	210
3.22. Recherche d'un équivalent . . . . .	212
3.23. Étude asymptotique au bord du disque de convergence . . . . .	214
3.24. Un théorème de Gauss . . . . .	216
3.25. Série de Lambert . . . . .	219
3.26. Théorèmes taubériens . . . . .	222

3.27. Condition suffisante d'injectivité d'une série entière . . . . .	228
3.28. Théorème de Bieberbach dans le cas réel . . . . .	229
3.29. Série de Laurent à valeurs entières . . . . .	231
3.30. Caractérisation des fonctions réelles analytiques . . . . .	233
3.31. Étude d'analycité . . . . .	235
3.32. Un théorème de Bernstein . . . . .	238
3.33. Principe des zéros isolés . . . . .	239
3.34. Nullité sur un arc du cercle de convergence . . . . .	240
3.35. Série entière à coefficients entiers, bornée sur son disque de convergence . . . . .	241
3.36. Fonctions entières de partie réelle bornée . . . . .	242
3.37. Fonction entière dominée par une exponentielle . . . . .	244
3.38. Relation entre $\sqrt[n]{ a_n }$ et $\frac{\ln f(z) }{ z }$ . . . . .	245
3.39. Principe du maximum pour une fraction rationnelle . . . . .	247
3.40. Principe du maximum . . . . .	249
3.41. Extrema d'une fonction entière . . . . .	252
3.42. Critère de convergence simple d'une suite de séries entières . . . . .	254
3.43. Complétude de l'espace des fonctions continues sur $\bar{D}$ , développables en série entière sur $D$ . . . . .	257
3.44. Logarithme d'une fonction entière qui ne s'annule pas . . . . .	260
3.45. Un théorème de Fejér. . . . .	262
3.46. Fonction entière telle que $f(2^n) = (-1)^n$ . . . . .	268

**Chapitre 4. Séries de Fourier** **273**

4.1. Calcul d'intégrales . . . . .	276
4.2. Majoration de la norme de la dérivation . . . . .	277
4.3. Inégalité de Bernstein (1912) . . . . .	280
4.4. Fonction $2\pi$ -périodique orthogonale aux polynômes trigo- nométriques de degré $< n$ . . . . .	282
4.5. Une inégalité . . . . .	283
4.6. Inégalité de Hilbert (1) . . . . .	284
4.7. Inégalité de Hilbert (2) . . . . .	285
4.8. Calcul de sommes de séries . . . . .	288
4.9. Développement eulérien de la fonction cotangente . . . . .	291
4.10. Développement en série de Fourier (1) . . . . .	293
4.11. Calcul d'intégrales par développement en série de Fourier . . . . .	295
4.12. Développement en série de Fourier (2) . . . . .	296
4.13. Calcul de la somme d'une série trigonométrique . . . . .	299
4.14. Inégalité entre normes . . . . .	302
4.15. Recherche d'équivalent . . . . .	303
4.16. Formule sommatoire de Poisson . . . . .	306
4.17. Un cas particulier de la formule sommatoire de Poisson . . . . .	308

4.18. Série génératrice des nombres de Bernoulli . . . . .	310
4.19. Série de Fourier d'une primitive . . . . .	313
4.20. Inégalité de Wirtinger . . . . .	315
4.21. Solutions périodiques de $x' = F(x)$ . . . . .	317
4.22. Résolution d'une équation différentielle . . . . .	321
4.23. Étude de convergence uniforme . . . . .	325
4.24. Condition suffisante d'analyticité . . . . .	330
4.25. Le phénomène de Gibbs . . . . .	331
4.26. Théorème de Weierstrass trigonométrique . . . . .	334
4.27. Théorème de Jackson (1911) . . . . .	336
4.28. Un théorème de Bernstein (1912) . . . . .	340
4.29. Noyau de Poisson . . . . .	342
4.30. Fonctions à coefficients de Fourier positifs . . . . .	345
4.31. Théorème de Fejér (1904) . . . . .	347
4.32. Complétude pour la norme quadratique . . . . .	350
4.33. Fonctions dont la série des coefficients de Fourier converge ab- solument . . . . .	351
4.34. Convergence de la série de Fourier d'une fonction $\alpha$ - höldérienne . . . . .	354
4.35. Dual topologique . . . . .	357
4.36. Opérateurs de convolution . . . . .	359

<b>Table des matières</b>	<b>365</b>
---------------------------	------------

<b>Index</b>	<b>371</b>
--------------	------------