

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Espaces euclidiens. Espaces hermitiens</b>	<b>5</b>
1.1. Bornes d'une fonction où intervient le produit scalaire . . . .	5
1.2. Boule contenant $n$ points à distances mutuelles supérieures à 2	7
1.3. Familles obtusangles . . . . .	8
1.4. Caractérisation des normes euclidiennes . . . . .	10
1.5. Norme d'un endomorphisme symétrique . . . . .	13
1.6. Fonctions additives sur deux vecteurs orthogonaux . . . . .	15
1.7. Applications de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}$ additives sur les vecteurs orthogonaux . . . . .	18
1.8. Forme linéaire sur un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	20
1.9. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (1) . . . . .	21
1.10. Caractérisation des projecteurs orthogonaux (2) . . . . .	22
1.11. Norme des projetés d'une base orthonormale . . . . .	23
1.12. Pseudo-inverse . . . . .	25
1.13. Condition pour que deux projecteurs orthogonaux commutent	26
1.14. Composition de projecteurs orthogonaux . . . . .	27
1.15. Contraction d'un espace euclidien . . . . .	28
1.16. Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	30
1.17. Norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	31
1.18. Distance d'une matrice à l'espace des matrices symétriques	33
1.19. Problèmes de minimisation dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . . . . .	34
1.20. Simplexes réguliers . . . . .	37
1.21. Décomposition QR et inégalité d'Hadamard . . . . .	40
1.22. Base orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	42
1.23. Polynômes de Laguerre . . . . .	45
1.24. Polynômes d'Hermite . . . . .	48
1.25. Méthode de Gauss . . . . .	51
1.26. Matrices de Gram . . . . .	53
1.27. Familles équiangulaires . . . . .	55
1.28. Familles isométriques . . . . .	56
1.29. Image d'une base orthonormée par un projecteur orthogonal	57
1.30. Une matrice orthogonale . . . . .	58
1.31. Convergence en moyenne des puissances d'une matrice orthogonale . . . . .	59
1.32. Orbites sous l'action d'un endomorphisme orthogonal . . .	60
1.33. Générateurs de $O(E)$ . . . . .	61
1.34. Théorème de Maschke (1898) . . . . .	62

1.35. Réduction des matrices orthogonales . . . . .	63
1.36. Exponentielle de matrices antisymétriques réelles . . . . .	65
1.37. Simplicité de $SO_3$ . . . . .	67
1.38. Polynômes de quatre variables invariants sous l'action de $O_2(\mathbb{R})$ . . . . .	70
1.39. Équation fonctionnelle faisant intervenir le groupe orthogonal	72
1.40. Endomorphismes conservant le produit vectoriel . . . . .	73
1.41. Le groupe des quaternions . . . . .	74
1.42. Une équation fonctionnelle . . . . .	76
1.43. Projection sur un convexe fermé . . . . .	78
1.44. Lemme de Farkas . . . . .	80
1.45. Éléments de $\mathbb{R}^n$ à composantes positives . . . . .	82
1.46. Inégalités . . . . .	84
1.47. Étude de normes sur $\mathcal{L}(E)$ où $E$ est hermitien . . . . .	86
1.48. Condition suffisante pour que deux matrices unitaires com- mutent . . . . .	89

## **Chapitre 2. Réduction des endomorphismes auto-adjoints** **91**

2.1. Codiagonalisation . . . . .	92
2.2. Puissances d'une matrice symétrique . . . . .	92
2.3. Méthode itérative pour une équation linéaire . . . . .	93
2.4. Décomposition en somme de droites et plans stables . . . . .	95
2.5. Spectre de la différence de deux projecteurs orthogonaux . . . . .	95
2.6. Produit de deux projecteurs orthogonaux . . . . .	96
2.7. Frame d'un espace euclidien . . . . .	97
2.8. Matrices à termes diagonaux égaux . . . . .	99
2.9. Caractérisation des matrices positives avec la trace . . . . .	101
2.10. Étude d'un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . . . . .	102
2.11. Caractérisation des symétries orthogonales . . . . .	105
2.12. Racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif . . . . .	107
2.13. Produit de deux matrices symétriques positives . . . . .	108
2.14. Condition de diagonalisabilité d'une matrice réelle . . . . .	109
2.15. Condition d'existence de $m$ vecteurs propres indépendants . . . . .	110
2.16. Une équation matricielle . . . . .	111
2.17. Équation dans $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	112
2.18. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives . . . . .	114
2.19. Caractérisation des matrices positives . . . . .	116
2.20. Matrice symétrique de taille 2 à coefficients positifs . . . . .	117
2.21. Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices symétriques . . . . .	118
2.22. Théorème de Suleimanova (1949) . . . . .	119
2.23. Matrice de passage à coefficients positifs . . . . .	121
2.24. Décomposition en valeurs singulières . . . . .	123
2.25. Dilatation isométrique d'une contraction . . . . .	125

2.26. Décomposition polaire (1) . . . . .	126
2.27. Décomposition polaire (2) . . . . .	128
2.28. Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ . . . . .	130
2.29. Décomposition de Choleski. Décomposition QR . . . . .	131
2.30. Inégalité d'Hadamard . . . . .	133
2.31. Inégalité de Fischer . . . . .	134
2.32. Recherche d'un minimum . . . . .	136
2.33. Image de $S^2$ par une fonction, où $S$ est la boule unité . . . . .	137
2.34. Majoration et minoration d'une fonction . . . . .	138
2.35. Inégalité de Kantorovich . . . . .	139
2.36. Inégalité de convexité . . . . .	141
2.37. Théorème du minimax . . . . .	142
2.38. Théorème d'entrelacement de Cauchy . . . . .	144
2.39. Une réciproque au théorème d'entrelacement de Cauchy . . . . .	146
2.40. Théorème de perturbation de Weyl . . . . .	147
2.41. Théorème de majoration de Schur . . . . .	148
2.42. Inégalités de Ky-Fan . . . . .	150
2.43. Majoration de $\text{Tr}(AB)$ . . . . .	152
2.44. Écart maximal entre deux valeurs propres . . . . .	153
2.45. Valeurs propres d'endomorphismes dont la somme est positive . . . . .	154
2.46. Étude de $\text{Tr}(AB - BA)^4$ , pour $A$ et $B$ antisymétriques . . . . .	156
2.47. Parité du rang d'un endomorphisme antisymétrique . . . . .	156
2.48. Endomorphismes antisymétriques en dimension 3 . . . . .	157
2.49. Carré d'une matrice antisymétrique . . . . .	158
2.50. Réduction des endomorphismes antisymétriques . . . . .	159
2.51. Matrices strictement positives . . . . .	161
2.52. Théorème de Liapounov . . . . .	162
2.53. Condition pour que $\text{Im } B \subset \text{Im } A$ . . . . .	164
2.54. Application convexe . . . . .	167
2.55. Condition pour qu'une matrice hermitienne soit définie positive . . . . .	168
2.56. Calcul de l'inverse d'une matrice par une méthode itérative . . . . .	169
2.57. Encadrement des valeurs propres de $AB$ . . . . .	170
2.58. Inégalité d'Hadamard pour une matrice hermitienne . . . . .	171
2.59. Produit de matrices hermitiennes positives . . . . .	173
2.60. Produit de Schur de deux matrices hermitiennes positives . . . . .	175
2.61. Inégalités . . . . .	176
2.62. Décomposition polaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . . . . .	177
2.63. Écriture d'un endomorphisme comme combinaison linéaire d'endomorphismes unitaires . . . . .	179
2.64. Matrices normales . . . . .	181
2.65. Théorème de Mirman (1968) . . . . .	182
2.66. Matrices unitairement congruentes à une matrice triangulaire . . . . .	185

<b>Chapitre 3. Formes quadratiques</b>	<b>189</b>
3.1. Formes bilinéaires réflexives . . . . .	189
3.2. Caractérisation des applications bilinéaires symétriques ou antisymétriques . . . . .	190
3.3. Base formée de vecteurs isotropes . . . . .	191
3.4. Formes quadratiques ayant même cône isotrope . . . . .	192
3.5. Composantes connexes par arcs . . . . .	193
3.6. Théorème de Pfister (1965) . . . . .	195
3.7. Indice d'une forme quadratique . . . . .	197
3.8. Famille de formes quadratiques . . . . .	199
3.9. Théorème de Fischer-Cochran . . . . .	200
3.10. Une forme quadratique définie positive . . . . .	201
3.11. Une forme quadratique positive . . . . .	202
3.12. Une forme quadratique définie négative . . . . .	203
3.13. Matrices symétriques à diagonale positive . . . . .	203
3.14. Restriction à un plan définie positive . . . . .	205
3.15. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives . . . . .	206
3.16. Comparaison de noyaux . . . . .	207
3.17. Une forme quadratique positive . . . . .	208
3.18. Condition pour qu'une matrice soit positive . . . . .	208
3.19. Inégalité de Bergström . . . . .	209
3.20. Convergence d'une suite croissante et majorée . . . . .	211
3.21. Décroissance de la fonction inverse . . . . .	211
3.22. Signature d'une forme quadratique réelle . . . . .	213
3.23. Composantes connexes . . . . .	214
3.24. Un calcul de signature (1) . . . . .	216
3.25. Un calcul de signature (2) . . . . .	216
3.26. Un calcul de signature (3) . . . . .	217
3.27. Formes quadratiques sur un corps fini . . . . .	217
3.28. Matrices symétriques positives telles que $A \leq B$ . . . . .	220
3.29. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques . . . . .	220
3.30. Comparaison d'endomorphismes symétriques définis positifs . . . . .	221
3.31. Convexité logarithmique . . . . .	222
3.32. Inégalité de Minkowski . . . . .	223
3.33. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques . . . . .	224
3.34. Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques . . . . .	225
3.35. Commutant du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée . . . . .	226
3.36. Minimalité du groupe orthogonal d'une forme non dégénérée . . . . .	228
3.37. Ellipsoïde de John-Loewner . . . . .	229
3.38. Sous-groupes compacts maximaux de $GL(E)$ . . . . .	231
3.39. Endomorphisme auto-adjoint sur un espace quadratique complexe . . . . .	232

<b>Chapitre 3. Formes quadratiques</b>	<b>189</b>
3.1. Formes bilinéaires réflexives	189
3.2. Caractérisation des applications bilinéaires symétriques ou antisymétriques	190
3.3. Base formée de vecteurs isotropes	191
3.4. Formes quadratiques ayant même cône isotrope	192
3.5. Composantes connexes par arcs	193
3.6. Théorème de Pfister (1965)	195
3.7. Indice d'une forme quadratique	197
3.8. Famille de formes quadratiques	199
3.9. Théorème de Fischer-Cochran	200
3.10. Une forme quadratique définie positive	201
3.11. Une forme quadratique positive	202
3.12. Une forme quadratique définie négative	203
3.13. Matrices symétriques à diagonale positive	203
3.14. Restriction à un plan définie positive	205
3.15. Caractérisation de Sylvester des matrices définies positives	206
3.16. Comparaison de noyaux	207
3.17. Une forme quadratique positive	208
3.18. Condition pour qu'une matrice soit positive	208
3.19. Inégalité de Bergström	209
3.20. Convergence d'une suite croissante et majorée	211
3.21. Décroissance de la fonction inverse	211
3.22. Signature d'une forme quadratique réelle	213
3.23. Composantes connexes	214
3.24. Un calcul de signature (1)	216
3.25. Un calcul de signature (2)	216
3.26. Un calcul de signature (3)	217
3.27. Formes quadratiques sur un corps fini	217
3.28. Matrices symétriques positives telles que $A \leq B$	220
3.29. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	220
3.30. Comparaison d'endomorphismes symétriques définis positifs	221
3.31. Convexité logarithmique	222
3.32. Inégalité de Minkowski	223
3.33. Inégalité sur le déterminant de matrices symétriques	224
3.34. Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques	225
3.35. Commutant du groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée	226
3.36. Minimalité du groupe orthogonal d'une forme non dégénérée	228
3.37. Ellipsoïde de John-Loewner	229
3.38. Sous-groupes compacts maximaux de $GL(E)$	231
3.39. Endomorphisme auto-adjoint sur un espace quadratique complexe	232

3.40. Réduction des matrices symétriques complexes . . . . .	233
3.41. Une décomposition . . . . .	235
3.42. Maximum d'une forme quadratique sur un compact . . . . .	238
3.43. Forme quadratique et réseau . . . . .	239
3.44. Lemme de Davenport-Cassels . . . . .	241
3.45. Image d'un cône . . . . .	242

## **Chapitre 4. Géométrie affine et euclidienne** **245**

4.1. Partage équitable . . . . .	245
4.2. Théorème de Pappus . . . . .	246
4.3. Théorème de Ménélaüs . . . . .	248
4.4. Quadrilatère complet . . . . .	249
4.5. Théorème de Sylvester-Gallai . . . . .	251
4.6. Aire d'un triangle . . . . .	252
4.7. Point de Gergonne . . . . .	254
4.8. Quadrilatère formé par les sommets et l'orthocentre d'un triangle . . . . .	255
4.9. Caractérisation des triangles équilatéraux . . . . .	256
4.10. Un triangle équilatéral . . . . .	256
4.11. Théorème de Ptolémée . . . . .	258
4.12. Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . . .	258
4.13. Suite de cercles . . . . .	260
4.14. Condition de cocyclicité de quatre points . . . . .	260
4.15. Problème angulaire . . . . .	262
4.16. Intersection de deux disques . . . . .	264
4.17. Ellipses semblables . . . . .	265
4.18. Rayon de courbure d'une ellipse . . . . .	266
4.19. Cercles tangents à une ellipse . . . . .	268
4.20. Triangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse . . . . .	271
4.21. Rectangles d'aire maximale inscrits dans une ellipse . . . . .	273
4.22. Problème de Pappus . . . . .	274
4.23. Cocyclicité de quatre points d'une ellipse . . . . .	275
4.24. Cercle orthoptique d'une ellipse . . . . .	276
4.25. Sphère orthoptique d'un ellipsoïde . . . . .	278
4.26. Centres des cercles circonscrits à une famille de triangles inscrits dans une parabole . . . . .	280
4.27. Centres des triangles équilatéraux inscrits dans une parabole . . . . .	281
4.28. Points équidistants de deux droites non coplanaires . . . . .	283
4.29. Diamètre transfini . . . . .	284
4.30. Deux problèmes d'extrema . . . . .	286
4.31. Problème d'extremum . . . . .	289
4.32. Triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle . . . . .	291
4.33. Billard convexe compact . . . . .	293

4.34. Problème de Fermat . . . . .	295
4.35. Polygone dont les milieux des côtés sont donnés . . . . .	299
4.36. Triangles à côtés parallèles . . . . .	300
4.37. Équivalence entre parties de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	302
4.38. Étude d'une suite d'applications affines . . . . .	304
4.39. Applications du plan conservant l'orthogonalité . . . . .	305
4.40. Sous-groupes finis du groupe affine réel . . . . .	309
4.41. Une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ n'est pas dédoublable . . . . .	309
4.42. Application conservant la distance unité . . . . .	310
4.43. Groupe des isométries du simplexe régulier . . . . .	313
4.44. Théorème de Carathéodory (1907) . . . . .	316
4.45. Théorème de Jung (1901) . . . . .	317
4.46. Points extrémaux d'un ensemble convexe . . . . .	320
4.47. Rectangle circonscrit à un convexe compact . . . . .	322
4.48. Théorème de Pick (1899) . . . . .	326
4.49. Droites à une distance strictement positive de $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	328
4.50. Polygone ayant trois sommets à coordonnées entières . . . . .	329
4.51. Recouvrement par des droites . . . . .	331
4.52. Rotations de $\mathbb{R}^3$ laissant un réseau invariant . . . . .	333
4.53. Un problème de Pólya (1918) . . . . .	334
4.54. Théorème de Minkowski . . . . .	336
4.55. Formule d'Euler . . . . .	338
4.56. Rectangles semi-entiers . . . . .	340
4.57. Pavage d'un rectangle par des carrés . . . . .	341