

Classes Prépas

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT EN CALCUL

Véronique Perdu



ellipses

Chapitre 1

FRACTIONS

CALCULS NUMÉRIQUES

Prérequis

- > Règles de calcul avec les fractions (cf. formulaire).
- > Formules de développements/factorisations (cf. formulaire).

Pour les exercices 1.1, 1.2 et 1.3, simplifier au maximum l'expression donnée.

Exercice 1.1 ★☆☆

1. $\frac{7}{6} + \frac{3}{4}$

2. $2 + \frac{1}{4}$

3. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$

4. $\frac{7}{12} - \frac{2}{3}$

5. $-5 \times \frac{2}{15}$

6. $\frac{5}{8} \times \frac{9}{10}$

7. $\frac{15}{12}$

8. $\frac{1}{5}$

8. $\frac{5}{12}$

9. $\frac{5}{4}$

9. $\frac{5}{12}$

4

▷ Corrigés page 49

Exercice 1.2 ★★☆☆

1. $\frac{3}{5} + \frac{5}{3} + \frac{2}{15}$

2. $-2 + \frac{8}{7} - \frac{9}{2}$

3. $3 \times \frac{16}{7} \times \frac{2}{9}$

4. $\frac{3}{2}$

7

5. $2 + \frac{6}{5} \times \frac{10}{3}$

6. $\frac{5}{12} - 1$

7. $\frac{3}{14}$

7. $\frac{4}{7}$

8. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

8. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

9. $\frac{5}{7 - \frac{9}{2}}$

9. $\frac{5}{7 - \frac{9}{2}}$

▷ Corrigés page 50

Exercice 1.3 ★★★

$$1. \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}$$

$$2. \frac{\frac{1}{3} + \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{5}{2}}$$

$$3. -\frac{5}{7 - \frac{9}{2}}$$

$$4. \frac{\frac{\pi}{3} + 1}{3 + \pi}$$

$$5. -\frac{18}{15} + 3 \times \frac{2}{5}$$

$$6. \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{3}}{\frac{1}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$7. -5 \times \frac{\frac{12}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{-\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}$$

$$8. \frac{6 \times \frac{3}{4} - 5 \times \frac{4}{3}}{7 \times \frac{3}{4} - 5 \times \frac{4}{3}}$$

▷ Corrigés page 50

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Prérequis

▷ Équations/inéquations produit, quotient.

Pour les exercices 1.4, 1.5 et 1.6, définir le domaine de validité D de l'(in)équation d'inconnue réelle x, t, y, a, \dots puis la résoudre sur ce domaine.

Exercice 1.4 ★☆☆

$$1. \frac{x+1}{3} + \frac{2-3x}{2} = 1$$

$$2. \frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} = 1$$

$$3. \frac{1-x}{x} = 0$$

$$4. \frac{1-x}{x} = 1$$

$$5. \frac{1}{x} = \frac{1}{1-x}$$

$$6. \frac{2+x}{3} \geq 1$$

$$7. \frac{2+x}{3} \geq \frac{x}{2}$$

$$8. \frac{2x-3}{x+1} < 0$$

▷ Corrigés page 51

Exercice 1.5 ★★★

$$1. \frac{x-4}{x+1} + \frac{3x+2}{2-3x} = 0$$

$$2. \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t^2-1} = 0$$

$$3. \frac{3}{a+3} - \frac{4}{a} = \frac{a+2}{a^2+3a}$$

$$4. \frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2} = \frac{5}{9}$$

$$5. \frac{u+1}{2u-1} \leq 1$$

$$6. \frac{x^2-x-2}{x-2} = 3x+7$$

$$7. \frac{7}{y-1} > \frac{2}{2-3y}$$

$$8. \frac{x(3-x)}{x^2-4} \geq 0$$

$$9. -\frac{4}{3\varphi+1} + \frac{2}{6-\varphi} > \frac{-3}{6-\varphi}$$

▷ Corrigés page 53

Exercice 1.6 ★★★

$$1. \frac{7}{4}(2x+3)(2x-5) \leq \frac{5x}{6}(2x+3)$$

$$2. \frac{9}{5(5-z)} - \frac{1}{30z} = \frac{1}{3}$$

$$3. -\frac{33}{1-5t} + \frac{5}{t+3} < 2$$

$$4. \frac{3-(1+s)^2-1}{\frac{s}{7}} = \frac{1}{7}$$

$$5. \frac{3\alpha-4}{\alpha-2} + \frac{3-\alpha}{\alpha+3} = \frac{2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2+\alpha-6}$$

▷ Corrigés page 56

DÉRIVÉES

Prérequis

▷ Dérivées des fonctions usuelles et composées (cf. formulaire).

Pour les exercices 1.7 et 1.8, donner le domaine D de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sur D . On donnera le résultat sous forme simplifiée.

Exercice 1.7 ★☆☆

$$1. f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

$$2. g(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

$$3. h(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$4. k(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$$

▷ Corrigés page 58

Exercice 1.8 ★★★

$$1. \alpha(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$2. \beta(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$3. \gamma(x) = \frac{1}{(x^2-4)^3}$$

$$4. \delta(x) = \frac{x}{2+x} - \frac{2+x}{x}$$

▷ Corrigés page 59

PRIMITIVES

Prérequis

> Primitives des fonctions usuelles et composées (cf. formulaire).

Pour les exercices 1.9, 1.10 et 1.11, donner le domaine de définition et de continuité D de la fonction f , puis déterminer une primitive F de f sur D .

Exercice 1.9 ★☆☆

1. $f(x) = \frac{x^2}{3}$

2. $f(x) = \frac{3}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{3}{2x}$

4. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

5. $f(x) = \frac{3}{1+x}$

6. $f(x) = \frac{4}{x^5}$

▷ Corrigés page 59

Exercice 1.10 ★★☆☆

1. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2}$

2. $f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}$

3. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

4. $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

5. $f(x) = \frac{3}{5-10x}$

6. $f(x) = \frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^3}$

▷ Corrigés page 60

Exercice 1.11 ★★★

1. $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$

2. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

3. $f(x) = \frac{5x^2}{3x^3+6}$

4. $f(x) = \frac{6x-9}{(x^2-3x-10)^3}$

5. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

6. $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

▷ Corrigés page 62

RACINES CARRÉES

Prérequis

- > Définition de la racine carrée.
- > Règles de calcul avec les racines carrées (cf. formulaire).

CALCULS NUMÉRIQUES

Pour les exercices 2.1, 2.2 et 2.3, transformer l'expression en une somme de termes de la forme $a\sqrt{b}$ où a est un rationnel, et b , un entier le plus petit possible.

Exercice 2.1 ★☆☆

1. $\sqrt{48}$

2. $\sqrt{75}$

3. $\sqrt{\frac{9}{16}}$

4. $\sqrt{\frac{25}{100}}$

5. $\sqrt{\frac{8}{72}}$

6. $\sqrt{\frac{35}{125}}$

7. $\sqrt{10-1}$

8. $\sqrt{3^2+4^2}$

▷ Corrigés page 64

Exercice 2.2 ★★☆☆

1. $\sqrt{36-16}$

2. $\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{5}{3} - 1}$

3. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

4. $(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})$

5. $\sqrt{144-12}$

6. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{72}{32}}$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

8. $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$

▷ Corrigés page 64

Exercice 2.3 ★★★

1. $\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{125}}{15}$

2. $7\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - 4\sqrt{\frac{3}{16}}$

3. $2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 2\sqrt{27}$

4. $\sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$

5. $\frac{\sqrt{2-\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{2}-3}}$

6. $-\sqrt{5}(2-\sqrt{5})^2$

7. $\frac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}}$

8. $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+2}$

$$9. \frac{\sqrt{4\left(1 - \frac{1}{9}\right)}}{3 - \sqrt{2}}$$

$$10. \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

▷ Corrigés page 65

ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

Prérequis

- ▷ Croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$.
- ▷ Équations/inéquations produit, quotient.

Pour les exercices 2.4, 2.5 et 2.6, définir le domaine de validité D de l'(in)équation puis la résoudre sur ce domaine.

Exercice 2.4 ★☆☆

$$1. \sqrt{x} = 2$$

$$2. \sqrt{2x+4} = 3$$

$$3. \sqrt{2-x} + 1 = 0$$

$$4. \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2$$

▷ Corrigés page 66

Exercice 2.5 ★★★

$$1. \sqrt{5x-3} = \sqrt{2-x}$$

$$2. 2\sqrt{t-1} - 1 = 0$$

$$3. 3\sqrt{a+2} = 2\sqrt{a}$$

$$4. \sqrt{b^2-1} \leq 2\sqrt{2}$$

$$5. t + \sqrt{t} = 2$$

$$6. \sqrt{u^2 + u + 1} = 2u + 1$$

$$7. \sqrt{\frac{m^2 + 3}{2m - 2}} = 1$$

$$8. \sqrt{3-x} > \sqrt{2x-4}$$

$$9. 5t = \sqrt{2+t^2}$$

▷ Corrigés page 67

Exercice 2.6 ★★★

$$1. \sqrt{x+8} - 2\sqrt{x} = 1$$

$$2. 2\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{y}} - 1$$

$$3. \sqrt{x-5} = 2x - 3$$

$$4. a - 2 \geq \sqrt{a+2}$$

$$5. \sqrt{\frac{15v+21}{v^2-5v+4}} = 1$$

$$6. \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{1 - x}$$

▷ Corrigés page 70

DÉRIVÉES

Prérequis

> Dérivées des fonctions usuelles et composées (cf. formulaire).

Pour les exercices 2.7, 2.8 et 2.9, donner le domaine D de dérivabilité de la fonction, puis calculer sa dérivée sur D . On donnera le résultat sous forme simplifiée.

Exercice 2.7 ★☆☆

1. $f(x) = 3\sqrt{x}$

2. $g(x) = 5x - 7\sqrt{x}$

3. $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$

4. $k(x) = \frac{4}{x} + \sqrt{2x}$

5. $m(x) = \frac{\sqrt{3}}{x}$

6. $n(x) = e^2\sqrt{x}$

7. $p(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(2)}$

▷ Corrigés page 72

Exercice 2.8 ★★☆☆

1. $f(x) = x\sqrt{x}$

2. $g(x) = \sqrt{2x+3}$

3. $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

4. $k(x) = (x+3)\sqrt{3x-1}$

▷ Corrigés page 73

Exercice 2.9 ★★★

1. $\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$

2. $\beta(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

3. $\gamma(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

4. $\delta(x) = (x + \sqrt{1-x})^2$

▷ Corrigés page 74

PRIMITIVES

Prérequis

> Primitives des fonctions usuelles et composées (cf. formulaire).

Pour les exercices 2.10, 2.11 et 2.12, donner le domaine de définition et de continuité D de la fonction f , puis déterminer une primitive F de f sur D .

Exercice 2.10 ★☆☆

1. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

2. $f(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

3. $f(x) = 2x + 1 + \frac{5}{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \sqrt{2} + x$

5. $f(x) = \frac{e^3}{\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \frac{1 + \ln(3)}{\sqrt{x}}$

▷ Corrigés page 76

Exercice 2.11 ★★☆☆

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$

2. $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

3. $f(x) = \sqrt{x}$

4. $f(x) = \sqrt{4+x}$

▷ Corrigés page 77

Exercice 2.12 ★★★

1. $f(x) = x\sqrt{1+3x^2}$

2. $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

3. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+2}}$

4. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$

▷ Corrigés page 77