Claire David • Pierre Gosselet

Équations aux dérivées partielles

3e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Zulashai - Shutterstock.com

11, rue Paul Bert 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083410-5

TABLE DES MATIÈRES

Vous pouvez accéder à des exercices corrigés supplémentaires à partir de la page de présentation de l'ouvrage sur le site de l'éditeur www.dunod.com.
Ces compléments sont au format pdf et permettent une recherche classique par mots-clés. Ils peuvent être lus, enregistrés ou imprimés en partie comme en totalité.

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est une introduction à l'étude des équations aux dérivées partielles. Il est destiné aux étudiants de niveau L3 et M1 des écoles d'ingénieurs et filières universitaires scientifiques. Il se base sur un cours de L3 donné aux étudiants en ingénierie mécanique de l'ENS de Cachan et de l'université Pierre et Marie Curie-Paris 6.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) apparaissent extrêmement fréquemment en sciences appliquées pour traduire des principes fondamentaux et modéliser de manière continue des phénomènes physiques. Face à cela, les étudiants se retrouvent souvent désarmés : les ouvrages dans ce domaine font généralement appel à des prérequis complexes, donnent des exposés trop généraux pour faire le lien avec des applications, ou au contraire éludent les fondations et se spécialisent sur certains aspects. L'étude des EDP est en effet un sujet très vaste, sur lequel les ouvrages de référence peuvent contenir plusieurs milliers de pages.

Cette troisième édition, revue et augmentée, est, encore, le fruit d'un compromis. Notre but est, toujours, de donner les éléments nécessaires à la compréhension des EDP qui jalonnent le monde des sciences appliquées, de savoir les interpréter, au sens classique et généralisé, connaître leurs principales propriétés et, lorsque cela est possible, les résoudre. Dans la deuxième édition, nous avions introduit les approches variationnelles qui font le lien entre les EDP théoriques et le calcul numérique. Ces méthodes sont, en effet, à la base de techniques d'approximation robustes extrêmement utilisées en ingénierie, dont il est intéressant de connaître le principe directeur. Dans cette troisième édition, nous introduisons quelques éléments plus modernes permettant d'aborder l'étude de certains problèmes peu réguliers.

L'objectif du premier chapitre est de donner le vocabulaire de base et de discuter, de manière assez empirique, des propriétés fondamentales des EDP les plus fréquentes en physique. Nous nous intéressons ensuite à l'analyse classique d'équations du premier et second ordre. Nous introduisons notamment la notion de courbe caractéristique d'une EDP.

Dans le chapitre quatre, nous donnons les fondements de l'interprétation généralisée des EDP en introduisant le concept de distributions. Ces dernières sont un outil extrêmement, puissant puisqu'elles offrent un cadre plus large pour manier les EDP, notamment en présence de discontinuités, et fournissent de nouveaux outils pour leur étude.

Nous développons aussi quelques éléments d'analyse spectrale (transformation de Fourier et Laplace pour les domaines non bornés et séparation de variables pour les domaines bornés) dont l'intérêt dépasse l'étude des EDP, et qui permettent dans certains cas d'obtenir facilement des solutions d'équations aux dérivées partielles.

Le chapitre qui suit est consacré à l'étude d'équations classiques (de transport, de la chaleur, des ondes, de Laplace) à l'aide des outils introduits aux chapitres précédents.

Le chapitre huit est une introduction aux approches variationnelles, qui offrent un cadre théorique riche dans lequel il est possible de prouver l'existence et l'unicité de la solution de certaines EDP.

Le dernier chapitre introduit les espaces de Besov, utiles pour l'étude des équations posées sur des domaines peu réguliers.

À la fin de chaque chapitre se trouve une sélection d'exercices types, avec, bien sûr, leurs corrigés détaillés. Ceux-ci se veulent volontairement simples, sans complication calculatoire.

Quatre annexes complètent cet ouvrage. La première est une remise en forme pour se réapproprier des bases de géométrie et calcul différentiel. La deuxième est consacrée à l'analyse hilbertienne, et donne les résultats nécessaires concernant les espaces de Banach et de Hilbert. La troisième annexe concerne l'intégration de Lebesgue et les espaces fonctionnels associés ; il s'agit de permettre au lecteur non spécialiste de comprendre comment cette théorie de l'intégration conduit à un cadre simple pour déployer les méthodes présentées dans l'ouvrage. La dernière annexe présente les propriétés fondamentale de l'espace de Sobolev dans lequel les méthodes variationnelles sont inscrites.

La bibliographie recense quelques ouvrages de référence, permettant d'approfondir le sujet.

Claire David
Pierre Gosselet

NOTATIONS

- **Ensemble et topologie**
  - $\partial\Omega$ bord du domaine Ω.
  - χ_A pour $A \subset \Omega$: fonction indicatrice de A : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$
- **Espaces fonctionnels**
  - $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance $p^{\text{ième}}$ est intégrable sur Ω.
  - $L^\infty(\Omega)$, espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées sur Ω.
  - $C^0(\Omega)$, espace des fonctions continues sur Ω.
  - $C^n(\Omega)$, $n \in [\![1, \infty]\!]$, espace des fonctions n fois continument dérivables.
  - $C_c^n(\Omega)$, $n \in [\![0, \infty]\!]$, espace des fonctions de classe $C^n(\Omega)$ à support compact.
  - $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, espace des fonctions tests pour les distributions.
  - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions à décroissance rapide, espace des fonctions tests pour les distributions tempérées.
  - $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω, espace des fonctions tests pour les distributions à support compact.
  - $H^1(\Omega)$, espace de Sobolev des fonctions de carré intégrable admettant un gradient de carré intégrable
- **Opérations sur les fonctions et les distributions**
  - $\text{supp}(f)$, support de la fonction f.
  - pour une fonction réelle de la variable réelle : f' dérivée première de f, f'' dérivée seconde, $f^{(j)}$ dérivée j-ème.
  - $f * g$, produit de convolution
- **Notation multientier :** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.
  - $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \alpha_i$.
  - $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_d^{\alpha_d}$ monôme.
  - $f \in C^N(\mathbb{R}^d)$ avec $N \geqslant |\alpha|$, $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

- **Opérateurs différentiels**
  - Gradient spatial d'une fonction scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$.
  - Dérivée normale :
$$\frac{\partial f}{\partial n} = df(\overrightarrow{n}) = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{n}.$$
  - Divergence spatiale d'un champ de vecteur : $\text{div}(\vec{p}) = \dfrac{\partial p_x}{\partial x} + \dfrac{\partial p_y}{\partial y} + \dfrac{\partial p_z}{\partial z}$.
  - Laplacien d'un champ scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
- **Opérations dans un espace vectoriel *E***
  - E', dual topologique de E.
  - $\langle g, h\rangle = g(h) \in \mathbb{R}$, crochet de dualité avec $h \in E$ et $g \in E'$.
  - $(g, h)_E$ produit scalaire avec $g \in E$ et $h \in E$.
  - $\|h\|_E$ norme de $h \in E$.

GÉNÉRALITÉS 1

1.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

Une *Équation aux Dérivées Partielles* (*EDP*) est une équation fonctionnelle qui met en relation des dérivées partielles. Typiquement, si u est une fonction à valeurs scalaires des variables x et y, $(x, y) \in \Omega$, où Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$, une *EDP* est une relation de la forme :

$$\mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{pour } (x, y) \in \Omega \tag{1.1}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

L'***ordre*** d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. L'équation (1.1) est donc d'ordre 1.

La ***dimension*** d'une équation aux dérivées partielles est le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue u. L'équation (1.1) est donc de dimension 2.

Résoudre l'*EDP* consiste donc à déterminer toutes les fonctions u définies sur Ω satisfaisant (1.1).

En général, une *EDP* est complétée par des conditions sur le bord de Ω du type :

$$\mathcal{G}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{pour } (x, y) \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{1.2}$$

Ces conditions peuvent être de nature très différentes et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions. Quand les conditions portent sur le bord complet du domaine, on parle de **problème aux frontières**. Quand le domaine est d'extension infinie autour d'un obstacle compact (par exemple lors de l'étude de la signature radar d'un objet), on parle de **problème extérieur**.

Quand les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation, on parle de **problème de Cauchy**.

Les équations de la physique sont fréquemment posées sur des domaines spatio-temporels du type $\Omega = \omega \times [t_0, +\infty[$, où ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et $[t_0, +\infty[$ est l'intervalle temporel d'étude, t_0 est l'instant initial (souvent pris égal à 0). Le temps joue un rôle particulier, dans la mesure où il est porteur du *principe de causalité* †. On a alors le plus souvent un problème aux frontières en espace et un

†. C'est le principe suivant lequel, si un phénomène physique, nommé *cause*, produit un autre phénomène, l'*effet*, alors ce dernier ne peut précéder la cause.

problème de Cauchy en temps que l'on appelle également **problème aux conditions initiales**.

Les problèmes aux frontières et les problèmes aux conditions initiales obéissent à des logiques différentes : pour les premiers, l'état est partiellement connu sur les bords et on cherche à l'aide de l'*EDP* à déterminer la solution dans l'ensemble du domaine ω, pour les seconds, l'état est complètement connu à l'instant initial t_0 et on va chercher à propager la solution à l'instant d'après puis, de proche en proche, à déterminer la solution sur l'ensemble de l'intervalle temporel d'étude.

Il n'existe pas de résultats généraux sur l'existence de solutions des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire de restreindre l'étude à certains cas. On donne donc, dans ce qui suit, une rapide classification des *EDP* et des conditions aux limites.

Définition 1.1 Classification des EDP

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

i. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***linéaire*** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)\,u + g(x,y) = 0$$

L'équation est dite ***homogène*** si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

ii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***semi-linéaire*** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y, et $\mathcal{F}$ une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iii. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***quasi-linéaire*** si elle est de la forme :

$$a\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,b\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{F}\left(u, x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

où a, b, c et $\mathcal{F}$ sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

iv. On dit qu'une équation aux dérivées partielles est ***complètement non linéaire*** si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

Cet ouvrage traite plus particulièrement d'équations aux dérivées partielles fréquemment rencontrées en physique, du premier ordre quasi-linéaires et du second ordre semi-linéaires.

Définition 1.2 Classification des conditions aux limites

i. On appelle ***condition de Dirichlet*** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un ***problème du premier type*** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Dirichlet.

ii. On appelle ***condition de Neumann*** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un ***problème du deuxième type*** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.

iii. On appelle ***condition de Fourier-Robin*** une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\omega$.

iv. On appelle ***problème du troisième type*** un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

Remarque 1.1

Dans le cas d'un problème extérieur, l'*EDP* est généralement complétée par un comportement asymptotique à l'infini.

Le concept même de recherche de solution(s) d'une équation aux dérivées partielles n'est pas forcément très clair, et nécessite d'être reprécisé pour chaque problème.

Un repère important est la notion de *problème bien posé*.

Définition 1.3

Un problème est *bien posé au sens de Hadamard* s'il *existe* une *unique* solution qui *dépend des données de façon continue* [†].

La dernière condition est particulièrement significative en physique. Une *EDP* traduit en général des principes physiques (comme la conservation de la masse,

†. Cette définition suppose le choix d'une mesure « raisonnable » des variations des données.

de l'énergie, de la quantité de mouvement) et des modèles (comme la relation effort/déformation dans un ressort, la loi de la gravitation) dans lesquels on peut avoir une confiance raisonnable. Les données (les valeurs des coefficients, conditions aux limites imposées) sont souvent le résultat de mesures et donc peu fiables. Il est souhaitable que la solution de l'équation aux dérivées partielles présente une certaine stabilité si les données venaient à être légèrement perturbées.

Une première limite du concept de problème bien posé apparaît pour les problèmes physiques où il est connu et souhaité que la solution de l'équation aux dérivées partielles ne soit pas unique (par exemple, dans l'étude des régimes turbulents en mécanique des fluides). Il faut alors classer les solutions en fonction de leurs propriétés (régularité, dimensions caractéristiques, etc.).

Une seconde limite est que le caractère bien posé peut dépendre de la façon dont on recherche la solution. Par exemple, une des premières techniques d'étude des équations aux dérivées partielles consistait à chercher des solutions analytiques (i.e. développables en série entière). Il a été démontré depuis qu'il existe des problèmes avec une unique solution analytique, mais de nombreuses autres solutions (même infiniment dérivables). De tels problèmes sont donc bien posés au sens des fonctions analytiques, mais mal posés dans un cadre plus général.

La question de la régularité [†] des solutions d'une équation aux dérivées partielles est souvent au cœur de son étude.

Le fait qu'une équation aux dérivées partielles présente des dérivées partielles d'ordre k suggère assez naturellement de chercher une solution au moins k fois dérivable ; c'est ce que l'on appelle le *cadre classique* (ceci dit, le fait de mettre en relation une fonction et ses dérivées suggère que toutes ont la même régularité, ce qui conduirait à des solutions infiniment dérivables, d'où la légitimité de chercher des solutions analytiques).

Le cadre classique peut se montrer trop restrictif : les discontinuités sont fréquentes en physique (ondes de choc, hétérogénéités), et il peut être souhaitable de placer l'équation aux dérivées partielles dans un cadre plus large où les solutions peuvent présenter des irrégularités. Dans ce cadre, abordé au chapitre 4, on parle de *solutions faibles* ou *solutions généralisées*. Cependant, le fait d'interpréter l'équation aux dérivées partielles au sens faible n'empêche pas de chercher des solutions classiques : une fois qu'une solution faible a été obtenue, on peut chercher à prouver qu'elle possède en fait des propriétés de régularité au sens « classique » (continuité, dérivabilité, etc.).

†. Le terme régularité est un raccourci pour parler des propriétés de continuité, dérivabilité (classique ou faible) d'une fonction, et de l'appartenance de la fonction et de ses dérivées à certains espaces de Lebesgue.

On aborde dans cet ouvrage quelques outils de fond pour comprendre les *EDP* et quelques techniques de résolution analytique. Très souvent, pour une équation donnée, une technique adaptée donne une unique solution ; il faut garder en mémoire que celle-ci n'est pas nécessairement la seule solution de l'équation. Néanmoins, les exemples et exercices proposés dans cet ouvrage ne concernent que des problèmes bien posés pour lesquels on admettra l'existence et l'unicité de la solution : on pourra légitimement parler de la (seule) solution.

1.2 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires en mécanique

Cette section a pour objectif de présenter des équations classiques et certaines de leurs propriétés fondamentales pour le physicien, que ce soit pour contrôler la validité d'un modèle, ou bien pour orienter les méthodes de calcul. Les configurations étudiées sont volontairement simples et certains résultats admis, les chapitres suivants permettront de donner de la rigueur et de généraliser cette présentation.

1.2.1 Équation de transport

Considérons un contaminant de concentration μ dans un fluide en mouvement, où le champ de vitesse $\vec{v}$, fonction des variables d'espace (x, y) et du temps t, est donné.

En l'absence de source répartie, la conservation de la matière conduit à l'équation :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

appelée *équation d'advection*.

Si on suppose que le fluide support est incompressible ($\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$), on obtient l'*équation de transport* :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\mu) \cdot \vec{v} = 0 \tag{1.3}$$

Cette équation du premier ordre gouverne les *phénomènes convectifs* (i.e. le contaminant est transporté par le fluide), mais apparaît aussi dans certains modèles de marchés boursiers (*équation de Black-Scholes* présentée en 7.5).

Considérons le cas unidimensionnel en espace :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \tag{1.4}$$

Si on suppose de plus que la vitesse v est constante, il apparaît clairement que toute fonction de la forme :

$$(x,t) \mapsto \mu(x,t) = \tilde{\mu}(x - vt) \tag{1.5}$$

est solution.

L'étude de l'*EDP* seule a donc conduit à une famille de solutions. Intéressons-nous maintenant à un problème aux limites complet.

Considérons donc le domaine $]x_0, x_1[\times]t_0, +\infty[$, et supposons que l'on connaît la concentration μ_0 à l'instant t_0 en tout point (problème à valeur initiale).

Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + v\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\ \mu(x,t_0) = \mu_0(x)\ \forall x \in]x_0, x_1[\end{cases}$$

La seule solution possible est la fonction :

$$(x,t) \mapsto \mu(x,t) = \mu_0(x - v(t - t_0)), \tag{1.6}$$

qui correspond à une propagation selon les x positifs (voir figure 1.1).

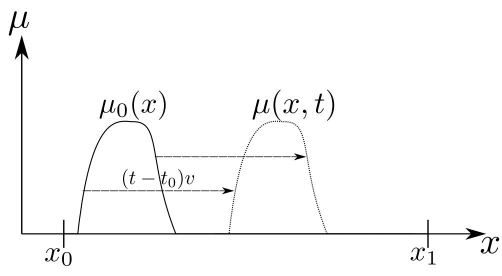

Figure 1.1 – Transport d'une répartition initiale

Remarque 1.2

La fonction initiale choisie dans la figure 1.1 n'est pas de classe C^1 (il y a des ruptures de pente), et donc la solution μ ne l'est pas, ce qui pose problème au sens classique puisque l'équation aux dérivées partielles suppose de pouvoir dériver.

Plus précisément, on voit que l'expression de la solution (1.6) ne requiert *a priori* aucune régularité sur μ_0, et que cette solution est par ailleurs tout à fait satisfaisante d'un point de vue physique. C'est, typiquement, ce que l'on appelle une *solution faible* du problème.

Étudions maintenant l'équation non homogène obtenue en ajoutant un *terme source* f dans le problème à condition initiale et en ne supposant pas v constante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + v\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = f(x,t) \\ \mu(x,t_0) = \mu_0(x) \end{cases} \tag{1.7}$$

Cherchons s'il est possible de caractériser la courbe représentative C_X d'une fonction $t \mapsto X(t)$, vérifiant $X(0) = X_0$, et telle que ce problème se ramène à une *équation différentielle ordinaire* (*EDO*). À cet effet, posons :

$$\hat{\mu}(t) = \mu(X(t),t)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial x}(X(t),t)\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t),t)$$

Ainsi, si $\dfrac{dX}{dt} = v$, alors :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t),t)$$

Autrement dit, on s'est ramené au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = v(X(t),t) \qquad \text{avec } X(0) = X_0 \\ \dfrac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t),t) \qquad \text{avec } \hat{\mu}(0) = \hat{\mu}_0(X_0,t_0) \end{cases} \tag{1.8}$$

Dans ce cas précis, il est possible de déterminer X puis d'en déduire $\hat{\mu}$.

La courbe C_X est appelée *courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles*. Elle permet de ramener celle-ci à système différentiel dépendant de moins de variables (ici, on passe d'une équation aux dérivées partielles en (x,t) à une équation différentielle ordinaire en t).

On dit que la solution « se propage selon la caractéristique ».

Ce rôle particulier des courbes (et dans le cas général des surfaces) caractéristiques conduit à la « méthode des caractéristiques » pour résoudre les équations aux dérivées partielles (essentiellement du premier ordre).

Reprenons le cas $v =$ Constante : si, au lieu de se donner une condition initiale $\mu(x,t_0) = \mu_0(x)$, on s'était donné une condition selon la courbe caractéristique :

$$\mu(x_0 + v(t-t_0),t) = \mu_c(t) \tag{1.9}$$

on se serait trouvé face à un problème de la forme :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(x_0 + v(t-t_0),t) \;\text{ et }\; \hat{\mu}(t) = \mu(x_0 + v(t-t_0),t) = \mu_c(t) \tag{1.10}$$

Ainsi, si $\dfrac{d\mu_c}{dt} = f(x_0 + v(t - t_0), t)$, on obtient une infinité de solutions, mais dans le cas contraire, il n'y a aucune solution.

Les courbes caractéristiques jouent donc également un rôle dans la définition de problèmes à valeur « initiale » bien posés. Cette propriété est exploitée dans la classification des équations du second ordre.

1.2.2 Équation de la chaleur

Désignons par $\vec{q}$ et T les fonctions « flux de chaleur » et « température », des variables spatiales (x, y), et du temps t.

D'après le premier principe de la thermodynamique, une équation d'état et la loi de Fourier, on a

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{q}) = -c\,\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \vec{q} = -k\,\overrightarrow{\operatorname{grad}} T \end{cases}$$

où $c > 0$ désigne la chaleur spécifique, et $k > 0$ le coefficient de conductivité thermique. Pour ce qui suit, on pose $a = \dfrac{k}{c}$.

Par combinaison, on obtient :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\,\Delta T = 0 \tag{1.11}$$

L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est appelée *équation de la chaleur*. Elle gouverne tous les phénomènes diffusifs (c'est donc aussi l'équation de la diffusion).

Reprenons l'équation en une dimension d'espace :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{1.12}$$

Réalisons une *étude par invariance d'échelle* :

si $(x, t) \mapsto T(x, t)$ est solution, alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(x, t) \mapsto T(\lambda x, \lambda^2 t)$ est également solution. En particulier, si on choisit formellement $\lambda = \dfrac{x}{t}$, on voit que la solution ne dépend plus que de la variable $z = \dfrac{x^2}{t}$.

Ceci incite à chercher une solution sous la forme :

$$(x, t) \mapsto T(x, t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right) = v(z)$$

Par dérivation composée, (1.12) implique :

$$0 = (2a + z)v'(z) + 4azv''(z) \tag{1.13}$$

ce qui conduit à :

$$v'(z) = v_1 \frac{e^{-\frac{z}{4a}}}{\sqrt{z}}$$

puis [†] :

$$T(x,t) = v_0 + v_1 \int_0^{\frac{x^2}{t}} \frac{e^{-\frac{z}{4a}}}{\sqrt{z}} dz = v_0 + v_1 \sqrt{4a\pi}\, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

Les principales propriétés de l'équation de la chaleur peuvent être illustrées en considérant le problème posé sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ avec une condition de décroissance à l'infini pour la variable d'espace, en supposant, en outre, que la répartion de chaleur initiale prend la forme d'un créneau ($T(x,0) = 1$ sur $[-1,1]$ et 0 ailleurs).

On peut vérifier que la solution (dont le tracé à différents instants est donné sur la figure 1.2) est donnée par :

$$T(x,t) = \mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)$$

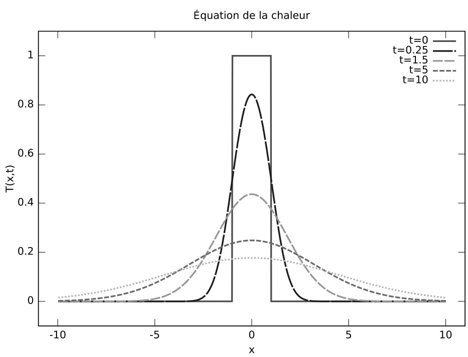

Figure 1.2 – Diffusion d'un créneau

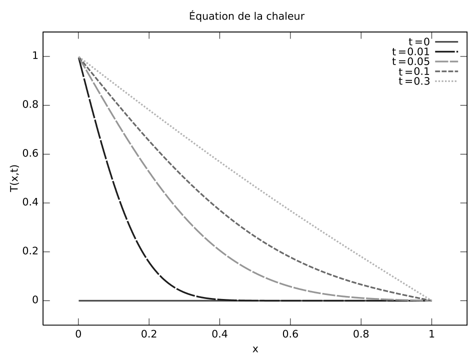

Figure 1.3 – Cloison thermostatée

La figure 1.2 met en évidence des propriétés de l'équation de la chaleur :

i. la *propagation à vitesse infinie* : dès que $t > 0$, la solution est non nulle en tout point de l'espace ;

ii. la *non-réversibilité* : si $\tilde{t} = -t$ et $\widetilde{T}(x,\tilde{t}) = T(x,t)$, l'équation devient

$$-\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \tilde{t}} + (-a)\,\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} = 0$$

†. La fonction erf, ou *fonction d'erreur de Gauss*, est donnée par : $\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$.

ce qui revient à changer le signe d'une constante thermodynamique et donc à donner un système complètement différent (et physiquement inconsistant puisqu'il ne respecte plus le second principe de la thermodynamique) ;

iii. la *régularisation* de la solution au cours du temps ; physiquement, on retrouve bien le comportement de systèmes dont l'entropie croît ;

iv. l'*absence d'histoire* du système : la configuration à un instant ne dépend que de celle à l'instant précédent ;

v. les valeurs maximales de température sont atteintes au début de l'expérience.

Considérons maintenant un problème plus réaliste : celui d'une cloison 1D initialement à température nulle :

$$T(x,0) = T_i(x) = 0, \qquad x \in [0,1]$$

La présence de bords implique de s'interroger sur les conditions à imposer. On donne la transcription physique des conditions aux limites les plus classiques :

i. *conditions limites de Dirichlet* : la température est imposée (le système est en contact avec un *thermostat*) :

$$T(x_0,t) = T_0(t) \qquad \text{donné}$$

ii. *conditions de Neumann* : le flux de chaleur ou, de manière équivalente, la dérivée normale de la température sont imposés :

$$(\vec{q}.\vec{n})(x_0,t) = -k\overrightarrow{\text{grad}}(T)(x_0,t).\vec{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n}(x_0,t) = q_0(t) \qquad \text{donné}$$

iii. *conditions de Robin ou de Fourier* : un échange thermique par convection est imposé :

$$(\vec{q}.\vec{n})(x_0,t) = -\alpha(T(x_0,t) - T_0)$$

α est le coefficient de convection ou impédance thermique du milieu environnant, T_0 est sa température.

La figure 1.3 correspond à l'évolution d'une cloison soumise à deux thermostats à ses extrémités (température initiale homogène égale à la valeur du thermostat de droite). Les mêmes propriétés que pour l'exemple précédent sont mises en évidence (vitesse de propagation infinie, régularisation).

1.2.3 Équation des ondes

Considérons un fluide isotherme. La thermodynamique permet de lier les variations de volume (divergence de la vitesse) et de pression, la conservation de la quantité de mouvement relie variation de vitesse et gradient de pression :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{v}) = -\xi_s \dfrac{\partial p}{\partial t} \\ \rho \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) \end{cases} \tag{1.14}$$

où ρ désigne la masse volumique, et ξ_s le coefficient de compressibilité isentropique.

Ce système de deux équations du premier ordre peut être étudié tel quel ou mis sous la forme d'une équation découplée du second ordre :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \tag{1.15}$$

où $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho \xi_s}}$ est la *célérité* ; l'équation est appelée *équation des ondes acoustiques*.

Il est intéressant de noter qu'en introduisant le changement de variable $u = x + ct$, $v = x - ct$, et qu'en posant $\tilde{p}(u, v) = p(x, t)$, l'équation vérifiée par la nouvelle fonction inconnue est :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial u \partial v} = 0$$

ce qui donne donc directement :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(u, v) &= p_1(u) + p_2(v) \\ p(x, t) &= p_1(x + ct) + p_2(x - ct) \end{aligned}$$

On voit qu'à l'instar de l'équation de transport, on obtient une solution généralisée (il n'y a pas de régularité apparente).

Exploitons cette propriété pour illustrer l'équation, et considérons, à cet effet, le domaine $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Si on connaît la configuration initiale p_0 et la vitesse initiale v_0, on a :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x, 0) = p_1(x) + p_2(x) \\ v_0(x) &= -\xi_s \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = -c\xi_s(p_1'(x) - p_2'(x)) \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer p_1 et p_2 (voir la section 7.2).

La figure 1.4 illustre le cas où $v_0 = 0$ et où p_0 est une fonction créneau, prenant la valeur 1 sur $[-1, 1]$.

On observe les propriétés suivantes :

i. deux ondes se propagent : l'*onde progressive* p_2 (vers les x positifs) et l'*onde rétrograde* p_1 (vers les x négatifs) ;

ii. la propagation se fait à *vitesse finie* (c) ;

iii. l'équation est réversible : si on considère un renversement temporel $\tilde{t} = -t$ et $\tilde{p}(x, \tilde{t}) = p(x, t)$, l'équation vérifiée par $\tilde{p}$ est la même que celle vérifiée par p.

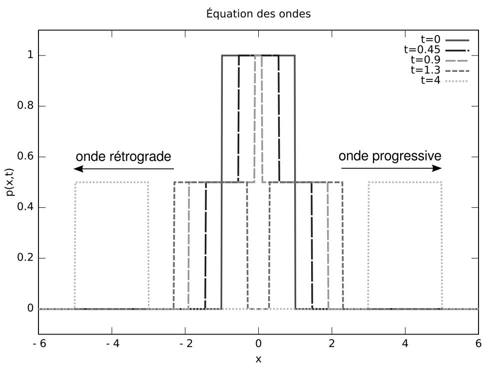

Figure 1.4 – Équation des ondes en milieu infini

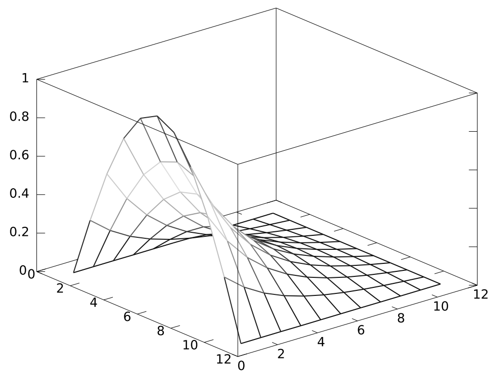

Figure 1.5 – Équation de Laplace

Si on considérait un domaine fini $[x_0, x_1]$, il serait nécessaire de donner des conditions aux limites. Physiquement, elles pourraient être :

i. des conditions de Dirichlet : pression imposée (par exemple extrémité d'un instrument à la pression atmosphérique)

$$p(x_0, t) = p_0(t) \qquad \text{donné}$$

ii. des conditions de Neumann : vitesse ou gradient normal de pression imposé (par exemple air en contact avec la membrane vibrante d'un tambour)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial \vec{v}.\vec{n}}{\partial t}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial v_0}{\partial t}(t) \qquad \text{donné}$$

iii. des conditions de Fourier : impédance acoustique du milieu extérieur donnée (système en contact avec un milieu absorbant)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\alpha(p(x_0, t) - p_0(t))$$

Des phénomènes classiques de réflexion ou d'absorption pourraient être observés au niveau des conditions aux limites.

Dans tous les cas, la donnée de la configuration et de la vitesse initiales serait nécessaire (la présence d'une dérivée d'ordre deux en temps requiert la connaissance des dérivées d'ordre inférieur).

1.2.4 Problème stationnaire

Dans les deux cas précédents, si on atteint une *position stationnaire*, i.e., qui ne varie plus dans le temps, le problème se ramène à celui d'un Laplacien nul. Le Laplacien est omniprésent dans les problèmes à variables spatiales (qui *a priori* jouent toutes le même rôle, sauf dans certains cas précis, comme les tuyères 1D, cf. l'équation (3.7)).

Une interprétation physique qui peut justifier cette omniprésence du Laplacien est qu'il est, à l'ordre 0, proportionnel à l'écart à la moyenne sur un petit domaine autour du point étudié. Prenons comme exemple un cube de côté $2d$, de volume $\mathcal{V}$; un développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage d'un point $M(x, y, z)$ conduit à :

$$\begin{aligned} f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x, y, z) &+ dx\,\frac{\partial f}{\partial x} + dy\,\frac{\partial f}{\partial y} + dz\,\frac{\partial f}{\partial z} \\ &+ dx^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + dy^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + dz^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &+ 2\,dx\,dy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\,dx\,dz\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2\,dy\,dz\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial yz} \\ &+ o\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont calculées en M.

Ainsi, en exploitant les parités, on obtient :

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \iiint_{-d}^{+d} \left(f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)\right)\, dv = \frac{\Delta f}{24} + o(1)$$

Le coefficient $1/24$ vient naturellement de la forme du domaine considéré.

Une fonction dont le Laplacien est nul est dite *harmonique*.

Sur un domaine infini, les fonctions harmoniques sont des polynômes (non nécessairement de degré 1).

Considérons le cas du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ (figure 1.5), sur lequel on recherche la solution stationnaire de l'équation de la chaleur lorsque l'on impose une température nulle sur les côtés $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, et, sur le côté $y = 0$ une température de la forme $x \mapsto T_0 \sin(\pi x)$ (ce choix paraîtra clair après avoir lu le chapitre 6).

On peut vérifier que la solution est donnée par :

$$(x, y) \mapsto T(x, y) = \frac{T_0}{\sinh(\pi)} \sin(\pi x) \sinh(\pi y)$$

Outre la grande régularité de la solution, la principale observation que l'on peut faire est que le maximum de la température est obtenu sur le bord du domaine.

1.2.5 Le problème de Cauchy sur l'équation de Laplace, un exemple de problème mal posé

Soit le problème bidimensionnel suivant, posé sur le domaine $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, \text{ pour } (x,y) \in \Omega \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \text{ pour } x \in [0,1] \\ u(0,y) = 0, \text{ pour } y \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y), \text{ pour } y \in [0,1] \end{aligned} \tag{1.16}$$

où g est une fonction donnée deux fois dérivable, nulle en 0 et 1.

Ce problème est ce que l'on appelle un problème inverse : il n'y a pas de condition limite sur le bord $x = 1$, et il y a deux conditions sur le bord $x = 0$ (sur u et sa dérivée normale). Ce type de problème se rencontre très fréquemment en pratique puisqu'il correspond aux techniques de contrôle non destructif : on peut imaginer que l'utilisateur souhaite connaître l'état du système sur le bord inatteignable $x = 1$, pour celà il impose une condition de Dirichlet nulle sur le bord $x = 0$ et mesure la réaction (de Neumann) g sur ce même bord.

On verra au chapitre 6, que ce problème se prête parfaitement à la séparation de variables. Il est naturel de développer la solution sur la base des fonctions :

$$Y_k \,:\, y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\pi y) \quad , \quad k \in \mathbb{N}^*$$

On obtient alors :

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(k\pi y) \sum_{k \in \mathbb{N}^\star} \left(\frac{A_k}{k\pi} \sinh(k\pi x) \right) \tag{1.17}$$

avec :

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sin(k\pi y)\, g(y)\, dy \tag{1.18}$$

Le théorème de Parseval (voir théorème 5.12, chapitre 5) conduit à :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^\star} A_k^2 = \|g\|^2_{L^2([0,1])}$$

Si on s'intéresse au système sur le bord $x = 1$ en posant $U(y) = u(1,y)$, on voit que :

$$\|U\|^2_{L^2([0,1])} = \sum_{k \in \mathbb{N}^\star} \left(\frac{A_k \, \sinh(k\pi)}{k\pi} \right)^2 \tag{1.19}$$

et le terme de droite ne peut pas être un $O\left(\|g\|^2_{L^2([0,1])}\right)$, à cause du sinus hyperbolique qui peut être arbitraitement grand (on peut, par exemple, prendre le chargement unitaire $g = Y_n$ qui donne, à l'aide du symbole de Kronecker, $A_k = \delta_k^n$ et étudier U pour n grand). Cette impossibilité de majorer une norme de la quantité cherchée (U) par une norme quantité connue (g) implique qu'une petite variation (typiquement due à l'imprécision de la mesure) peut se répercuter en de grandes variations sur la quantité d'intérêt. Bien qu'il possède une unique solution, le problème est mal posé au sens de Hadamard.