Guy CHATEIGNER
Michel BOËS
Jean-Paul CHOPIN
Daniel VERKINDÈRE

Électricité en 19 fiches

Régimes sinusoïdal et non-sinusoïdal

DUNOD

Nouvelle présentation 2013

ISBN 978-2-10-059994-3

Table des matières

FICHE 1

Linéarité / non-linéarité – Régimes périodiques sinusoïdal et non-sinusoïdal

Objectifs : Distinguer un circuit linéaire d'un non-linaire. Choisir les outils mathématiques adaptés au fonctionnement du circuit : le régime périodique sinusoïdal ou le régime périodique non-sinusoïdal.

I Linéarité / non-linéarité

- **Circuit linéaire**

Dipôle linéaire – Charge linéaire

Un dipôle – ou une charge – est linéaire si, et seulement si, la fonction f ou g, de sa relation tension-courant $u = f(i)$ ou $i = g(u)$, est linéaire :

$$f(k_1 i_1 + k_2 i_2) = k_1 f(i_1) + k_2 f(i_2) \quad \text{ou} \quad g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2)$$

où k_1, k_2, λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

Exemples : Résistances : $u = Ri$, condensateurs : $i = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et bobines : $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ constituent des dipôles linéaires si R, L et C sont des constantes.

Si une source de tension sinusoïdale alimente une charge linéaire, alors le courant dans celle-ci est sinusoïdal.

Circuit électrique linéaire

Tous les dipôles qui le constituent sont linéaires. Les tensions et courants du circuit sont reliés par un *système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants*. Lorsqu'une « sortie » (tension ou courant), notée $s = s(t)$, ne dépend que d'une seule « entrée » (tension ou courant), notée $e = e(t)$, le système se réduit à une seule équation :

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_2 \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + a_0 s = b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} + \ldots + b_2 \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2} + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + b_0 e \qquad (m \leqslant n)$$

Remarques :

– Si l'équation différentielle comporte un terme constant (dû à une polarisation par exemple) on l'élimine par un changement de variable pour retrouver la forme ci-dessus.
– Si la sortie dépend de plusieurs entrées, on utilise le principe de linéarité (voir ci-dessous).

Exemple : Circuit RLC (Fig. 1.1)

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_\mathrm{E}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_R}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + u_R = RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{E}}{\mathrm{d}t}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + u_L = LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{E}}{\mathrm{d}t^2}$$

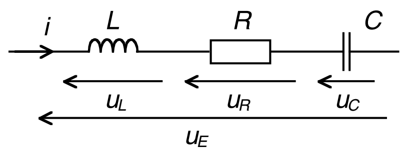

Figure 1.1 Circuit RLC

Principe de linéarité

Dans un circuit linéaire, la réponse d'une grandeur (tension ou courant) désignée comme « sortie » et notée $s(t)$, est la somme des réponses dues à chaque source (indépendante ou liée) d'excitation $e_k(t)$ prise séparément, les autres sources étant éteintes (on dit aussi « passivées », c'est-à-dire rendues passives). Ce qui s'écrit :

$$s(t) = \sum_k f_k[e_k(t)],\ \text{les fonctions } f_k \text{ étant linéaires}$$

Exemple : Voir l'exercice « Application du théorème de superposition », fiche 5.

- **Circuit non-linéaire**

Dipôle non-linéaire – charge non-linéaire

Un dipôle – ou une charge – est non-linéaire si, et seulement si, la fonction f ou g de sa relation tension-courant $u = f(i)$ ou $i = g(u)$, n'est pas linéaire.

Exemples

Une V.D.R. (Voltage Dependant Resistor) : $i = ku^n$, une thermistance (sa résistance est fonction de la température qui dépend donc aussi de la puissance qu'elle dissipe), une bobine à noyau ferromagnétique (Fig. 1.2), une diode (même idéale) et un interrupteur sont des dipôles non-linéaires.

En convention récepteur, la relation entre la tension et le courant s'écrit :

$$u = N\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = N\frac{\mathrm{d}f(i)}{\mathrm{d}t}$$

où N est le nombre de spires du bobinage (voir fiche 9).

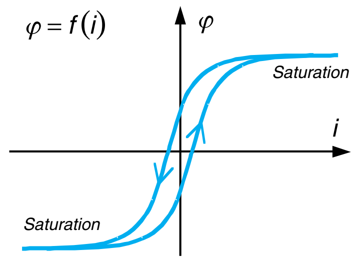

Figure 1.2 Caractéristique $\varphi = f(i)$ d'une bobine à noyau ferromagnétique

Remarque : Dans le cas de la bobine, la tension est proportionnelle à la variation du flux, et la relation tension-flux est linéaire ; mais c'est la relation entre flux et courant, souvent non-linéaire, qui est alors cause de non-linéarité globale.

Si une source de tension sinusoïdale alimente une charge non-linéaire, alors le courant dans celle-ci n'est pas sinusoïdal.

Circuit électrique non-linéaire

Au moins un des dipôles qui le constituent est non-linéaire. Les tensions et courants du circuit sont reliés par un *système d'équations différentielles non-linéaires*, qui nécessite une résolution numérique sophistiquée (ce que font les simulateurs).

II Régimes périodiques sinusoïdal et non-sinusoïdal

- **Régime périodique sinusoïdal**

(Fiches 2 à 10 pour le monophasé et fiches 15 à 18 pour le triphasé)

Régime sinusoïdal *(voir fiche 2)*

Un circuit électrique est en *régime sinusoïdal permanent (ou régime harmonique)* quand tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence. **Le circuit électrique doit être linéaire** et alimenté en permanence par une source d'énergie électrique sinusoïdale. Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, elles doivent être synchrones et de même fréquence. Le régime sinusoïdal permanent est un régime périodique particulier.

Notation complexe *(voir fiches 4 et 5)* ***et vecteurs de Fresnel*** *(voir fiche 3)*

Soit un circuit linéaire dont la sortie $s = s(t)$ dépend de la seule entrée $e = e(t)$. Si $e(t)$ est sinusoïdale, alors $s(t)$ est aussi sinusoïdale de même fréquence (régime sinusoïdal établi). Bien entendu, les calculs sur les valeurs instantanées restent possibles, mais ils deviennent vite longs et délicats (il faut remplacer les expressions de $e(t)$ et $s(t)$ dans l'équation différentielle à coefficients constants). Afin de faciliter les calculs, on utilise deux outils, qui font abstraction du temps : le formalisme complexe ou la construction vectorielle de Fresnel.

$$\left.\begin{aligned} e(t) &= E\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha_e) \\ \underline{E} &= [E\,;\alpha_e] = E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_e} \\ \overrightarrow{E} &= [E\,;\alpha_e] \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{circuit}} \left\{\begin{aligned} s(t) &= S\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha_s) \\ \underline{S} &= [S\,;\alpha_s] = S\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha_s} \\ \overrightarrow{S} &= [S\,;\alpha_s] \end{aligned}\right.$$

Passage de l'équation différentielle à coefficients constants à la notation complexe et réciproquement

En supposant valide la notation complexe, on passe de l'équation différentielle à la notation complexe en remplaçant $e(t)$ par $\underline{E}$, $s(t)$ par $\underline{S}$, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ par $\mathrm{j}\omega$ et plus généralement $\mathrm{d}^k/\mathrm{d}t^k$ par $(\mathrm{j}\omega)^k$. L'opération inverse permet de passer de la notation complexe à l'équation différentielle. Le principe est le suivant :

Passage de l'équation différentielle à la notation complexe

$$\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = K\left(\tau'\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + e\right)$$

$$\mathrm{j}\omega\tau\underline{S} + \underline{S} = K(\mathrm{j}\omega\tau'\underline{E} + \underline{E})$$

$$\underline{S} = \frac{K(1 + \mathrm{j}\omega\tau')\underline{E}}{1 + \mathrm{j}\omega\tau}$$

Passage de la notation complexe à l'équation différentielle

Remarque : Dans certains cas, il peut être plus simple d'utiliser la notation complexe pour la mise en équation puis d'en déduire l'équation différentielle.

Exemple

Soit le schéma (Fig. 1.3) où u_E est une source de tension variable. En utilisant la notation complexe, on peut exprimer la fonction de transfert $\underline{U_\mathrm{S}}/\underline{U_\mathrm{E}}$.

Tout calcul fait, on obtient :

$$\frac{\underline{U_\mathrm{S}}}{\underline{U_\mathrm{E}}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}(L/R)\omega + \mathrm{j}^2 LC\omega^2}$$

On écrit les termes en $\underline{U_\mathrm{S}}$ à gauche et ceux en $\underline{U_\mathrm{E}}$ à droite :

$$(\mathrm{j}^2 LC\omega^2 + \mathrm{j}(L/R)\omega + 1)\underline{U_\mathrm{S}} = \underline{U_\mathrm{E}}$$

Puis, en remplaçant $\underline{U_S}$ par u_S, $\underline{U_E}$ par u_E, jω par d/dt et j$^2\omega^2$ par d^2/dt^2, on obtient l'équation différentielle reliant u_S à u_E :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_S}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_S}{\mathrm{d}t} + u_S = u_E$$

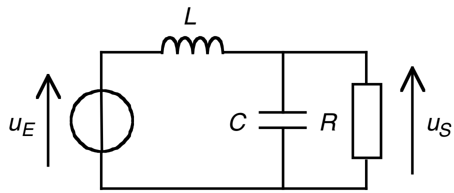

Figure 1.3 Circuit de l'exemple

- **Régime périodique non-sinusoïdal**

(voir fiches 11 à 14 pour le monophasé et fiche 19 pour le triphasé)

Régime périodique *(voir fiche 11)*

Un circuit électrique est en régime périodique quand tensions et courants sont des fonctions périodiques du temps. Le régime périodique est un régime établi (permanent) obtenu quand tensions et courants sont devenus périodiques.

Signal périodique

Un signal périodique (tension ou courant en électricité) se reproduit à l'identique au cours du temps. Son diagramme temporel est une suite de motifs identiques. La période T d'un signal périodique est la plus petite durée entre deux instants où le signal se reproduit à l'identique :

$$\forall t,\ s(t + kT) = s(t) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Développement en série de Fourier *(voir fiches 12 et 13)*

Un signal réel $s(t)$ périodique de période T, développable en série de Fourier, peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Remarque : Ce développement permet une *approche spectrale*, chacune des *composantes* du signal étant analysée séparément sur le même circuit ; la composante continue donne lieu à une étude simplifiée en régime continu ; les autres composantes, toutes sinusoïdales, sont identifiées d'après leur fréquence n/T.

Cas d'un circuit linéaire alimenté par une source périodique non-sinusoïdale *(voir fiche 12, 12.3 « Méthodes », et les exercices en fin de fiche)*

Soit un circuit linéaire dont la sortie $s = s(t)$ dépend de la seule entrée $e = e(t)$. Si $e(t)$ est périodique et développable en série de Fourier, alors $s(t)$ est la somme des réponses obtenues pour chacune des composantes du développement en série de Fourier de $e(t)$.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{n_{\max}} \cos(n\omega t + \alpha_n) \xrightarrow{\text{circuit}} s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n_{\max}} \cos(n\omega t + \beta_n)$$

Cette méthode est basée sur le principe de linéarité (voir paragraphe « Circuit linéaire » ci-dessus).

Exemple : Filtre passe-bas du 1er ordre excité par une tension rectangulaire (Fig. 1.4).

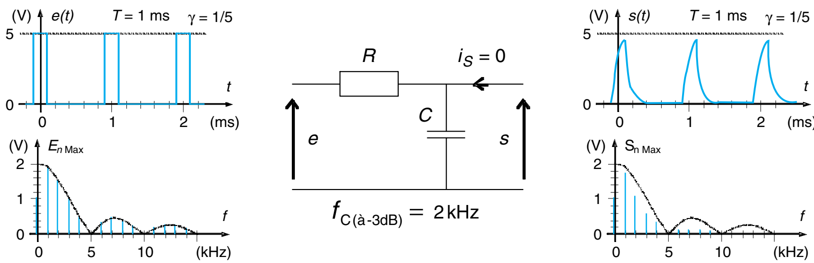

Figure 1.4 Filtre passe-bas du 1er ordre excité par une tension rectangulaire

Cas d'un circuit non-linéaire

Il existe des cas fréquents (redressement, commutation, composants non-linéaires, etc.) où le circuit est globalement non-linéaire. En régime périodique, l'approche spectrale est valable même si le circuit est non-linéaire. La connaissance des développements en séries de Fourier des tensions et courants permet de résoudre une grande quantité de problèmes pratiques et théoriques.

Exemple : Redresseur double alternance alimenté par une tension sinusoïdale (Fig. 1.5).

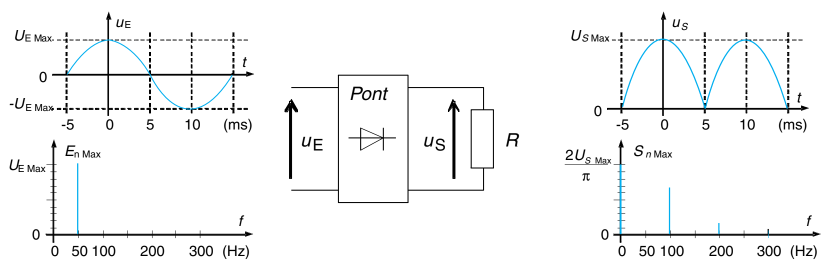

Figure 1.5 Redresseur double alternance alimenté par une tension sinusoïdale

FICHE 2

Grandeur sinusoïdale : représentation temporelle et caractéristiques

Objectifs : Lire, comprendre et mesurer les caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale représentée en fonction du temps.

I À savoir

- **Régime sinusoïdal permanent**

Un circuit électrique est en *régime sinusoïdal permanent* (ou *régime harmonique*) quand tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence.
Le circuit électrique doit être linéaire (c'est-à-dire composé de dipôles linéaires) et alimenté en permanence (le régime transitoire a donc cessé) par une source d'énergie électrique sinusoïdale. Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, elles doivent être synchrones et de même fréquence. Le régime sinusoïdal permanent est un régime périodique particulier. Un *signal sinusoïdal* s'écrit :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_s)$$

- **Expression temporelle d'une tension sinusoïdale** (Fig. 2.1 et Fig. 2.2)

$$\boxed{u = u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_u)}$$

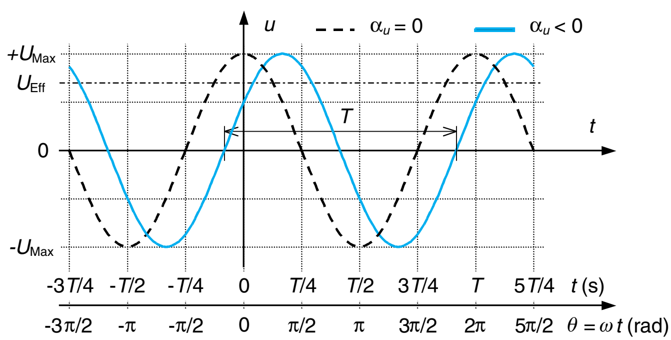

Figure 2.1 La tension en trait continu est en retard de phase sur la référence en trait pointillé

Symbole	Nom	Unité
$u = u(t)$	valeur instantanée de la tension	volt (V)
$U_{Max} = \widehat{U}$	valeur maximale de la tension	volt (V)
$U_{Moy} = \langle u \rangle = 0$	valeur moyenne de la tension	volt (V)
$U_{Eff} = U = \dfrac{U_{Max}}{\sqrt{2}}$	valeur efficace de la tension	volt (V)
t	temps	seconde (s)
$\omega t + \alpha_u$	phase de u à l'instant t	radian (rad)
α_u	phase initiale (à $t = 0$) de u	radian (rad)
T (avec $\omega T = 2\pi$)	période	seconde (s)
$f = \dfrac{1}{T}$	fréquence	hertz (Hz)
$\omega = 2\pi f$	pulsation	radian par seconde (rad/s)

Figure 2.2 Définitions pour une grandeur sinusoïdale

Remarque : Ceci reste valable pour toute grandeur sinusoïdale, par exemple l'intensité d'un courant s'écrit : $i = i(t) = I_{Max} \cos(\omega t + \alpha_i)$.

- **Déphasage**

Le déphasage est la différence entre les phases initiales de deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence.
Le déphasage entre une tension u et un courant i, u en avance de phase par rapport à i si φ positif, est :

$$\boxed{\varphi = \alpha_u - \alpha_i}$$

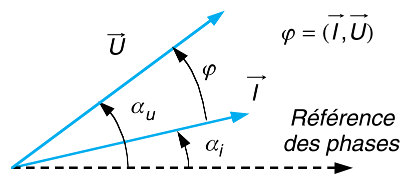

Figure 2.3 Représentation de Fresnel associée (voir fiche 3)

Remarques :

– Les phases initiales et le déphasage sont écrits modulo 2π.
– L'I.E.C. (International Electrotechnical Commission) recommande que la valeur indiquée du déphasage soit supérieure à $-\pi$ rad et inférieure ou égale à π rad, ce qui s'obtient par l'ajout éventuel d'un multiple de 2π rad à la différence $\alpha_u - \alpha_i$.
– Si $\varphi > 0$ alors on dit que la tension u est en ***avance de phase*** par rapport au courant i (ou que i est en ***retard de phase*** par rapport à u), et si $\varphi < 0$ alors on dit que u est en ***retard de phase*** par rapport à i (ou que i est en ***avance de phase*** par rapport à u).

II Méthodes

En régime sinusoïdal permanent, les tensions et courants d'un circuit sont tous sinusoïdaux de même fréquence. Pour qu'il en soit ainsi, tous les éléments doivent être linéaires, et s'il y a plusieurs sources, toutes doivent être synchrones et de même fréquence.
Les lois des nœuds et des mailles restent valables à condition de les appliquer aux valeurs instantanées, aux représentants vectoriels (voir fiche 3) ou aux représentants complexes (voir fiche 4).

III Mesures

- **Voltmètre - Ampèremètre - Pince ampèremétrique**

Mesures de la tension aux bornes d'une charge et de l'intensité la traversant.
- Un voltmètre AC (Alternative Current) placé en parallèle ou dérivation (Fig. 2.4) permet de mesurer la valeur efficace de la tension.
- Un ampèremètre AC placé en série (Fig. 2.4), permet de mesurer la valeur efficace de l'intensité d'un courant.

Montage aval dit aussi à courte dérivation ou **à tension « vraie »**. Condition d'utilisation :
$i' \ll i \Longleftrightarrow Z_{\text{Voltmètre}} \gg Z_{\text{Charge}}$

Montage amont dit aussi à longue dérivation ou **à intensité « vraie »**. Condition d'utilisation :
$u' \ll u \Longleftrightarrow Z_{\text{Ampèremètre}} \ll Z_{\text{Charge}}$

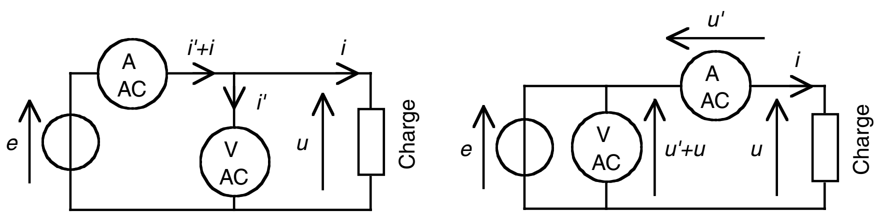

Figure 2.4 Mesures de U_{Eff} et I_{Eff} ; $e = E_{\text{Max}} \cos(\omega t)$

Remarques :
- Le montage aval est le plus couramment utilisé car les voltmètres modernes possèdent toujours des impédances très grandes devant la plupart des charges, alors que les petites impédances des ampèremètres (fonction des calibres) peuvent parfois ne pas être négligeables devant certaines charges.
- L'utilisation d'une pince ampèremétrique (capteur de courant sans contact galvanique à transformateur de courant ou sonde à effet Hall) évite d'avoir à ouvrir le circuit (Exemple du montage amont :

Fig. 2.5). Dans la pratique, c'est la facilité de pose de la pince ampèremétrique et les conditions de sécurité qui imposent souvent le choix du montage amont ou aval.

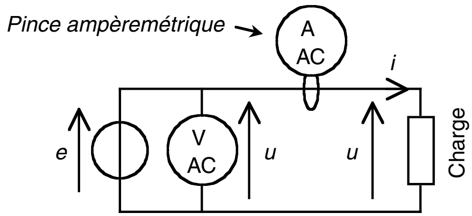

Figure 2.5 Mesures de U_{Eff} et I_{Eff} avec pince ampèremétrique
Exemple du montage amont

- **Oscilloscope**

Un oscilloscope permet de visualiser une tension en fonction du temps, de mesurer sa valeur maximale, de mesurer le déphasage entre deux tensions. De plus, les oscilloscopes numériques permettent généralement d'afficher directement les valeurs maximales, moyennes et efficaces, les déphasages, les périodes, les fréquences, etc.

– L'utilisation d'entrées différentielles isolées (ou de sondes différentielles isolées) diminue les risques électriques et écarte les risques de court-circuit par la masse de l'oscilloscope, car la masse de l'appareil est reliée à la terre sauf en cas de double isolation.

– La visualisation des courants est facilitée par l'utilisation de sondes de courant.

Exemple 1 : Mesure du déphasage entre tension et courant d'un dipôle d'impédance Z à l'aide d'un oscilloscope, entrées non isolées (Fig. 2.6). La voie A visualise la tension $u_1 = u_A$ aux bornes du dipôle et la voie B

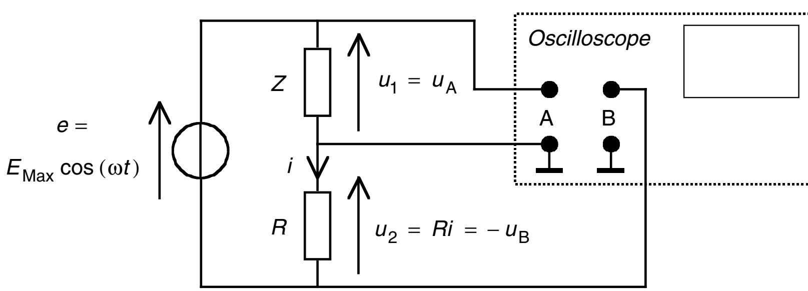

Figure 2.6 Schéma de mesure – La voie B est inversée
Exemple du montage aval