

# TABLE DES MATIÈRES

## QUELQUES RAPPELS DE TOPOLOGIE

1. Quelques définitions .....	1
2. Quelques théorèmes .....	6
3. Exercices .....	8

## I. ESPACES MESURABLES

1. Algèbres de Boole .....	9
2. Motivation probabiliste .....	11
3. La notion de tribu .....	12
4. Applications mesurables .....	13
5. Applications mesurables réelles .....	14
6. Exercices .....	18

## II. ESPACES MESURÉS

1. Définitions et exemples .....	19
2. Propriétés des mesures .....	21
3. Le théorème de prolongement .....	25
4. Propriétés vérifiées presque partout .....	32
5. Exercices .....	33

## III. INTÉGRALE DE LEBESGUE

1. Intégrale supérieure .....	35
2. Intégrale d'une fonction mesurable .....	39
3. Propriétés de l'intégrale .....	41
4. Le théorème de Lebesgue .....	43
5. Applications du théorème de Lebesgue .....	46
6. Exercices .....	48

## IV. MESURES PRODUIT, MESURES IMAGES ET DENSITÉS

1. Le théorème de Fubini .....	51
2. Mesure image et transfert .....	54
3. Mesures à densité .....	55
4. Le théorème de Radon-Nikodym .....	57
5. Exemples .....	62
6. Exercices .....	65

## V. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

1. Généralités .....	67
2. E.V.T. localement convexes .....	69
3. Séries et familles sommables .....	72
4. Quelques exemples concrets d'E.V.T. .....	76
5. Exercices .....	78

## VI. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

1. Généralités .....	81
2. Quelques théorèmes importants .....	84

3. Le Théorème de Hahn-Banach .....	86
4. Exemples .....	93
5. Exercices .....	95
VII. DUALITÉ DANS LES ESPACES NORMÉS	
1. Notations et définitions .....	98
2. Réflexivité .....	101
3. Transposition .....	105
4. Exercices .....	106
VIII. ESPACES DE HILBERT	
1. Formes bilinéaires .....	110
2. Généralités sur les espaces de Hilbert .....	112
3. Dualité dans les espaces de Hilbert .....	115
4. Sommes et bases hilbertiennes .....	116
5. Un exemple de base hilbertienne .....	120
6. Exercices .....	123
IX. OPÉRATEURS BORNÉS	
1. Définitions et premières propriétés .....	127
2. Spectre d'un opérateur .....	130
3. Opérateurs compacts .....	133
4. Spectre d'un opérateur compact .....	137
5. Exercices .....	141
X. OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT	
1. Adjoint et opérateurs hermitiens .....	146
2. Opérateurs positifs .....	150
3. Spectre d'un opérateur hermitien compact .....	152
4. Exemple d'utilisation du spectre .....	155
5. Exercices .....	156
XI. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	
1. Généralités sur les équations différentielles .....	159
2. Équations linéaires .....	162
3. Le problème de Sturm-Liouville .....	165
4. Exercices .....	170
APPENDICE : AXIOME DU CHOIX ET LEMME DE ZORN .....	
172	
COMPLÉMENTS 1 : CALCUL DE VOLUMES .....	
174	
COMPLÉMENTS 2 : INTÉGRALE DE RIEMANN .....	
180	
SOLUTIONS DES EXERCICES .....	
185	
BIBLIOGRAPHIE .....	
241	
INDEX ALPHABÉTIQUE .....	
243	