J'intègre

ECG
1re année
PROGRAMMES
2021

Mathématiques approfondies Informatique

TOUT-EN-UN

Matthias Gorny

Ancien élève de l'ENS Cachan, docteur en mathématiques et professeur de mathématiques en ECG1, filière maths approfondies (et auparavant en ECS1) au lycée Carnot (Paris).

Antoine Sihrener

Ancien élève de l'ENS Cachan, professeur en MPII au lycée Faidherbe (Lille), a enseigné 8 ans en ECS1.

DUNOD

Couverture :
- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082631-5

Avant-propos

Ce livre est né d'un constat fait par nos anciens élèves de première année : malgré l'abondance de littérature destinée aux élèves de l'ancienne filière ECS, aucun livre n'était entièrement satisfaisant en le sens où il répondait à toutes leurs attentes. En effet :

- Les livres de cours ne proposent en général que des résumés de cours, pas des cours détaillés avec les démonstrations : nous trouvons que c'est un tort, car les démonstrations sont importantes dans la formation des élèves. Loin d'être les repoussoirs que les élèves y voient souvent, nous y voyons des méthodes que nous retrouvons à l'écrit comme à l'oral, et on apprend à faire des mathématiques comme on apprend à faire de la musique : en répétant encore et encore des gammes... De plus, il nous semble que l'on apprécie mieux un résultat quand on sait d'où il vient.
- Les livres d'exercices ne comportent que des exercices, justement, pas de cours, et nos élèves se plaignaient souvent du fait que les exercices étaient trop classiques et ne suffisaient pas à les préparer efficacement à ce qu'ils rencontraient en colle ou à l'écrit.
- Enfin, les élèves de première année sont les grands laissés-pour-compte des livres d'annales (ceux-ci étaient déjà rares en ECS, ils sont pour l'instant inexistants en ECG, filière totalement nouvelle). En effet, les sujets s'adressent aux élèves de deuxième année et, même s'ils comprennent beaucoup de questions sur le programme de première année (nous ne le répéterons jamais assez, celui-ci ne doit pas être négligé), ils contiennent des questions sur celui de deuxième année et donc ne peuvent être abordés par les élèves de première année. Ceux-ci manquent donc de matière pour s'entraîner aux devoirs et à l'exercice de l'écrit (totalement différent de ce qui est fait jusqu'en terminale, ne serait-ce que parce que les sujets ne sont pas faits pour être finis).

Nous avons donc voulu écrire le livre que nos élèves recherchaient, que nous aurions aimé qu'ils lisent, qu'ils relisent, et qu'ils aient sur leur table de chevet :

- Un livre avec tout le cours, pas seulement un résumé, puisque nous refusons tout effet de bachotage (car nous sommes des enseignants : nous voulons que nos élèves comprennent et pas qu'ils recrachent des méthodes avalées mais non comprises). Le cours est en effet ce qu'il y a de plus important : nous avons donc voulu mettre l'accent sur celui-ci car il est inutile de faire des exercices, des problèmes, sans avoir une parfaite connaissance du cours. Un élève ne connaissant pas son cours est comme un acteur ne connaissant pas son texte... Certaines démonstrations mises à part et qui, selon nous, n'apporteraient rien et qui sont laissées en exercices (elles sont repérées par la mention $\rightsquigarrow$ EXERCICE.), nous avons donc fait le choix de l'exhaustivité : le lecteur y trouvera TOUT ce qu'il est censé savoir et maîtriser à la fin de sa première année.
- Un livre avec bon nombre de remarques (y compris dans la marge) que nous avons rajoutées au fil des années, pour reformuler et ainsi faire mieux comprendre un résultat, pour éviter des erreurs classiques.

- Un livre avec de nombreux exemples et dessins, pour que le le lecteur s'entraîne à manipuler tous les objets définis dans ce livre, ainsi que les nombreux théorèmes, propositions, lemmes et corollaires.
- Un livre avec des chapitres courts plutôt que des chapitres longs, ce qui peut expliquer le petit nombre d'exercices par chapitres, mais nous avons fait ce choix car cela fait des « moins gros morceaux à avaler » à chaque fois. De plus, nous pensons que l'ouvrage y gagne en cohérence : nous mettons dans des chapitres séparés les résultats séparés. En exagérant un peu, nous pourrions dire que notre idéal est : « une séance, un chapitre ».
- Un livre avec des applications, des activités, pas toujours au programme et pas toujours faciles, mais qui servent d'entraînement, d'application des résultats du cours, et qui tombent fréquemment à l'écrit ou à l'oral (par exemple l'inversibilité des matrices de Vandermonde). Elles peuvent être sautées en première lecture, mais nous pensons qu'elles vont profiter au lecteur curieux, courageux, et qui connaît bien son cours. Les faire armé d'un stylo pourra, selon nous, être un premier entraînement à l'écrit avant les problèmes. Car il faut être honnête : on n'apprend qu'en écrivant, qu'en cherchant, parfois qu'en séchant, et le temps passé à chercher la solution d'un problème difficile, même si cela n'a pas abouti, n'est jamais perdu.
- Un livre avec des « Vrai ou Faux » pour vraiment maîtriser les hypothèses des théorèmes, pour voir leur importance, pour manipuler des (contre-)exemples, toujours instructifs.
- Un livre avec des méthodes également, car celles-ci sont tout de même importantes : nous refusons simplement de ne donner qu'elles, sans explication et sans dire d'où elles viennent.
- Un livre avec des exercices intégralement corrigés et de tous niveaux (indiqués par des étoiles).
- Un livre avec des problèmes (au nombre de 20) faisant pratiquer les mathématiques aux élèves en même temps qu'ils leur font découvrir des résultats originaux et, selon nous, intéressants, parfois classiques mais que l'on rencontre rarement en première année, surtout en filière commerciale. Nous proposons des problèmes que nous avons donnés en devoir à nos anciens élèves ; encore une fois, ils sont accessibles en première année mais, surtout, ils ressemblent à des sujets de concours : la difficulté y est progressive, avec des questions pour tous les niveaux, et nous pensons que tous les élèves gagneront à s'y frotter.
- Enfin, un livre avec les principales commandes en Python, pour que les élèves n'oublient pas que dans le mot « mathématiques », il y a le mot « informatique » : les questions d'informatique sont en effet nombreuses aux concours !

Les lecteurs habitués aux livres d'exercices trouveront peut-être que le petit nombre d'exercices, parfois difficiles, est le point faible de cet ouvrage. Ceci s'explique en premier lieu par le choix assumé de proposer un cours non condensé : nous pensons, comme nous l'avons déjà dit, qu'il est plus profitable au lecteur de maîtriser totalement son cours que d'effectuer encore et encore les mêmes exercices. Le lecteur peut trouver des exercices faciles et classiques n'importe où (à commencer par certains exercices qu'il verra en classe !) : nous avons préféré mettre l'accent sur autre chose, que le lecteur ne trouvera pas ailleurs. Mais que celui-ci se rassure : nous ne voyons pas la pratique des exercices comme secondaire. Le livre en contient tout de même plus de 200, couvrant l'ensemble du programme et, nous l'espérons, intéressants et instructifs. De plus, le cours contient suffisamment d'exemples (pouvant être vus comme les premiers exercices du chapitre, ceux-là très simples), d'applications plus ou moins classiques, de problèmes enfin, pour qu'il y en ait pour tous les niveaux et pour tous les goûts, et pour que le lecteur puisse pratiquer suffisamment pour maîtriser l'ensemble du programme de première année, somme toute assez conséquent.

Car, oui : la filière ECG et la filière ECS avant elle ne sont ni la MPSI ni la PCSI. Cependant, les mathématiques enseignées dans cette filière sont tout de même d'un assez haut niveau. Si on ajoute à cela les coefficients des épreuves de mathématiques aux concours, les plus élevés, cela donne une filière où les mathématiques sont la matière principale (mais pas la seule, évidemment). D'où l'importance d'être bien épaulé, bien accompagné, bien guidé pendant cette période d'intense travail qu'est la classe préparatoire. Mais que l'élève ne s'inquiète pas : en travaillant dur, en lisant tous les exemples, en refaisant les démonstrations (un stylo à la main !), en se laissant guider par ses enseignants (ainsi que par les auteurs de ce livre), non content de progresser et de réussir honorablement, nous sommes convaincus qu'il y prendra plaisir. Nous aurons alors le sentiment d'avoir rempli notre objectif (et notre mission d'enseignant).

Nous avons déjà dit que ce livre est né grâce à tous nos anciens élèves. C'est aussi grâce à eux et pour eux que nous avons, au fil des années, amélioré (ou, du moins, essayé de le faire) notre cours, notre façon d'enseigner, que nous avons essayé de créer des sujets originaux, pour les préparer aux concours, évidemment, mais aussi (surtout ?) pour leur faire aimer les mathématiques, autant que nous les aimons. N'en faisons pas une discipline uniquement de concours, tout comme nous refusons de rabaisser nos élèves à des bêtes de concours : même si une partie (une partie seulement !) de notre métier consiste à les y préparer, ils valent mieux que cela, ils sont la raison pour laquelle nous faisons et aimons ce métier, et nous les en remercions. Nous remercions également tous nos collègues et amis (ainsi que certains de nos élèves) qui ont bien voulu relire ce livre, et sans qui celui-ci serait moins réussi qu'il a la prétention de l'être. Nous remercions donc : Jérémy Balouka, Rim Boujloud, Aliénor d'Estalenx, Sherine Djafer, Fanny Doré, Roxane Duroux, Jérôme Gärtner, Lucile et Clément Gombeaud, Louis Goudour, Maude Huynh-Gayon, Julien Lejeune, Pierre Lissy, Jean Louet, Marius Lucas, Raphaël Maillet, Valentin Melot, Benoît Mésognon, Basile Morcrette, Philippe Poulain, Diego Renaud, Adrien Segovia, Christopher Shirley, Fabien Trousselet, Alixe Vilcosqui et Joschka Weinhold. Nous remercions plus particulièrement Arnaud Jobin pour ses merveilleux dessins de limites. Plus généralement, ses talents pédadogiques nous inspirent tous les jours.

Nous tenons également à rassurer nos fils Léon et Marius : nous ne leur en voulons pas d'être nés pendant la rédaction de ce livre. Ils sont tellement mignons que nous leur pardonnons cette erreur de timing.

Enfin, nous tenons à remercier nos femmes Eve et Mathilde de ne pas nous avoir quittés pour avoir écrit ce livre pendant qu'elles accouchaient. Nos bébés tiennent bien de leurs pères et ne sont pas les seuls à avoir un pauvre sens du timing...

Sommaire

Premier Semestre

Chapitre 1

Éléments de logique

LE COURS

Le but de ce premier chapitre est de donner quelques éléments de logique permettant d'articuler les propositions mathématiques entre elles. Ils sont indispensables pour effectuer des raisonnements mathématiques corrects.

I Propositions

Définition. *Une proposition (ou assertion, ou prédicat) est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.*
Par convention, quand on énonce une proposition, c'est que l'on affirme qu'elle est vraie.

Exemples :

- *Quelques propositions vraies : « La Terre fait partie du système solaire », « L'entier 24 est un multiple de 3 », « La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».*
- *Quelques propositions fausses : « Tous les chats sont gris », « L'entier 25 est un multiple de 3 », « Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$ ».*

Définition.

- *Un axiome est une proposition que l'on suppose vraie a priori (et que l'on ne cherche pas à démontrer).*
- *Un théorème est une proposition vraie qui désigne en général une proposition particulièrement importante.*
- *Un lemme est une proposition vraie qui est un résultat préliminaire utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
- *Un corollaire est une proposition vraie qui est la conséquence (souvent immédiate) d'une autre proposition vraie.*
- *Une conjecture est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, sans en avoir de preuve.*

À part les axiomes, la véracité (ou la fausseté) d'une proposition doit résulter d'une démonstration (ou preuve) : elle s'appuie sur des hypothèses, sur des axiomes, sur des propositions démontrées précédemment et sur les règles de logique (que nous allons voir en détail dans ce chapitre).

Exemples :

- *La proposition « Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite » est un axiome appelé cinquième axiome d'Euclide.*
- *Le théorème de Pythagore est la proposition : « Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit ». Il en existe de nombreuses démonstrations.*
- *La conjecture de Goldbach est la proposition non démontrée qui s'énonce comme suit : « Tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » (par exemple, $20 = 7 + 13$ et $2000 = 3 + 1997$).*

En 2014, cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers jusqu'à 4×10^{18}... de quoi penser qu'elle doit être vraie, mais il n'y a pas de preuve à ce jour.

Définition (propositions équivalentes). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ est équivalente à $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ qui est vraie si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont simultanément vraies ou bien simultanément fausses et qui est fausse sinon.*

Si la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes.

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On dit aussi que deux propositions équivalentes sont deux propositions qui ont les mêmes valeurs de vérité, dans la table de vérité.

Remarques :

- L'équivalence joue pour les propositions le rôle que joue l'égalité pour les nombres.

  Par exemple les expressions $1+2$ et 3 sont différentes et pourtant $1+2=3$. De façon analogue, si x est un réel, les propositions « $x^2=1$ » et « $x=1$ ou $x=-1$ » ne sont pas identiques et pourtant $(x^2=1) \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=-1)$.

- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des propositions. On a :
  — $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (réflexivité).
  — Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, alors $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ est vraie (symétrie).
  — Si $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ sont vraies, alors $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ est vraie (transitivité).

- Une table de vérité est un tableau comportant plusieurs colonnes : dans les colonnes de gauche, on donne les différentes valeurs possibles des différentes propositions entrant en ligne de compte ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ etc.) et dans la colonne de droite, on donne la valeur de vérité, vraie (V) ou fausse (F), correspondante de la proposition étudiée ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ci-contre). Par exemple, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est fausse si $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse (deuxième ligne). La valeur de vérité d'une proposition est la dernière colonne de sa table de vérité, et deux propositions sont équivalentes quand elles ont même valeur de vérité (donc la même dernière colonne). Le nombre de lignes (sans compter la première) de la table est le nombre de configurations possibles pour les valeurs de vérité des propositions en jeu :
  — $4=2^2$ lignes s'il y a 2 propositions (VV,VF,FV,FF).
  — $8=2^3$ lignes s'il y a 3 propositions (VVV,VVF,VFV,VFF,FVV,FVF,FFV,FFF).

Dans la pratique, on n'utilise jamais de table de vérité. Nous les introduisons dans ce chapitre uniquement pour aider le lecteur à appréhender les opérations sur les propositions.

Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, il y a 2^n lignes si il y a n propositions.

II Négation, conjonction, disjonction

Définition. *La négation d'une proposition $\mathcal{A}$ est la proposition notée $\text{non}\,\mathcal{A}$ qui est vraie quand $\mathcal{A}$ est fausse et qui est fausse quand $\mathcal{A}$ est vraie.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\text{non}\,\mathcal{A}$
V	F
F	V

Exemples :

- *La négation de « ce chat est blanc » est « ce chat n'est pas blanc ».*
- *Si x est un réel, alors la négation de « $x \geqslant 0$ » est « $x < 0$ ».*
- *Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors la négation de « f est croissante » est « f n'est pas croissante »... et certainement pas « f est strictement décroissante » ni même « f est décroissante ».*

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La conjonction $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la proposition qui est vraie quand les propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux et qui est fausse quand l'une des deux au moins est fausse.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple : *Soit x un réel. La proposition « $3 \leqslant x < 9$ » est équivalente à la proposition « $(x \geqslant 3)$ et $(x < 9)$ ».*

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La disjonction $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est la proposition qui est vraie quand l'une des propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ou les deux, sont vraies et qui est fausse quand les deux sont fausses.*

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples :

- *La proposition « La forme géométrique  est de couleur grise ou est un carré » est vraie.*

- *Soit a et b deux réels dont le produit est nul. La proposition « $(a=0)$ ou $(b=0)$ » est vraie.*

- *L'ensemble des réels x tels que la proposition « $(x \leqslant 1)$ ou $(x > 3)$ » est vraie est noté* $]-\infty\,;1] \cup]3\,;+\infty[$.

Remarque : Le ou mathématique est le « ou inclusif » : ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie quand au moins l'une des deux est vraie, et même si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies en même temps (contrairement au « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et qui est celui utilisé dans le langage courant).

En clair, en mathématiques, ce n'est pas « fromage ou dessert », c'est « au moins l'un des deux parmi le fromage et le dessert » !

Les assertions de la proposition suivante sont immédiates :

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. Les propositions suivantes sont vraies :*

1. $\text{non}(\text{non } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
2. $\mathcal{A}$ ou (non $\mathcal{A}$),
3. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
4. $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$
5. $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{A})$,
6. $(\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B})$,
7. $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ et } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$,
8. $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$.

Le point 2 s'appelle le « tiers exclu ». Les points 5 et 6 sont des propriétés dites de « commutativité ». Les points 7 et 8 sont des propriétés dites d'« associativité ».

Proposition (distributivité). *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.*

- $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C})$.
- $(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C} \iff (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C})$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

La mention $\rightsquigarrow$ Exercice, que l'on retrouvera tout au long de ce livre, signifie que la démonstration est omise (par manque de place et parce qu'elle est fastidieuse et/ou n'apporterait rien) et laissée en exercice au lecteur (souvent c'est une simple vérification ou c'est analogue à une autre démonstration).

Proposition (lois de Morgan). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions.*

- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B})$.
- $\text{non}(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \iff (\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})$.

Démonstration. On vérifie que les propositions $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{B}))$ et $\text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B})$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$)	non $\mathcal{A}$	non $\mathcal{B}$	(non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$)
V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

L'autre est analogue et laissé en exercice. □

Exemple : *On lance un dé à 6 faces et on considère $\mathcal{A}$ la proposition « obtenir un chiffre pair » et $\mathcal{B}$ la proposition « obtenir un chiffre strictement supérieur à 3 ».*

- *La proposition $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est « obtenir 2, 4, 5 ou 6 ». La proposition non($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est donc équivalente à « obtenir 1 ou 3 ».*

- *La proposition $\big((\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B})\big)$ est « obtenir un chiffre impair et inférieur ou égal à 3 ». Elle est équivalente à « obtenir 1 ou 3 ».*

III Implication

1) Définition de l'implication

Elle est définie par la table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition « $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ » est la proposition notée $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ qui est vraie lorsque $\mathcal{B}$ est vraie chaque fois que $\mathcal{A}$ est vraie et qui est fausse lorsque $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse simultanément.*

Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit indifféremment :

- *Si $\mathcal{A}$ (est vraie), alors $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *$\mathcal{A}$ est une condition suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *$\mathcal{B}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.*
- *Pour que $\mathcal{B}$ (soit vraie), il suffit que $\mathcal{A}$ (soit vraie).*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie dans le cas où $\mathcal{A}$ est fausse. Cela peut sembler curieux au premier abord. Cela vient de l'usage courant du *Si... alors...* qui peut porter à confusion. Une implication est le *Si... alors...* que l'on utilise pour exprimer une règle. Prenons l'exemple des propositions $\mathcal{A}$: « boire de l'alcool » et $\mathcal{B}$: « avoir plus de 18 ans ». La règle « Si tu bois de l'alcool, alors tu as plus de 18 ans » est l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. La règle n'est enfreinte que dans le cas où $\mathcal{A}$ est vraie et $\mathcal{B}$ est fausse. Dans les autres cas elle est respectée. En particulier, elle est respectée si on ne boit pas !

La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ **ne signifie pas** « $\mathcal{A}$ est vraie donc $\mathcal{B}$ est vraie ».

Exemples :

- *Considérons les propositions $\mathcal{A}$: « Il pleut » et $\mathcal{B}$: « Le sol (de la rue) est mouillé ». On est d'accord que si « il pleut », alors « le sol est mouillé ». Ainsi la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie. On peut dire aussi :*
  - *« Il pleut » est une condition suffisante pour que le sol de la rue soit mouillé. Mais elle n'est pas nécessaire (car le sol sera aussi mouillé si un employé municipal vient de le nettoyer ou s'il a plu peu de temps auparavant...).*
  - *« Le sol est mouillé » est une condition nécessaire pour qu'il pleuve.*
  - *Pour que le sol soit mouillé, il suffit qu'il pleuve.*
  - *Pour qu'il pleuve, il faut que le sol soit mouillé.*

  Mais $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie pas « il pleut donc le sol est mouillé ».
  Elle est vraie même s'il ne pleut pas.
- *Soit f une fonction définie sur un intervalle I est à valeurs réelles. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I. On peut dire aussi :*
  - *La proposition « f est continue » est une condition nécessaire de la proposition « f est dérivable ». Mais elle n'est pas suffisante (car la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas dérivable en 0).*
  - *La proposition « f est dérivable » est une condition suffisante de la proposition « f est continue ». Mais elle n'est pas nécessaire.*
  - *Pour que f soit continue, il suffit que f soit dérivable.*
  - *Pour que f soit dérivable, il faut que f soit continue.*
- *Soient A, B et C trois points du plan. Considérons les propositions $\mathcal{P}$: « Le triangle ABC est rectangle en A » et $\mathcal{Q}$: « $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ». L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie (il s'agit du théorème de Pythagore).*

Savoir qu'une implication est vraie ou fausse ne nous dit absolument rien sur la véracité de sa réciproque. Par exemple toute fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ est appelée la réciproque de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Proposition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition* $(\text{non } \mathcal{A})$ ou $\mathcal{B}$.

DÉMONSTRATION. On vérifie que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et de $((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B})$ ont la même table de vérité :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	non $\mathcal{A}$	(non $\mathcal{A}$) ou $\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

□

Si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie mais $\mathcal{A}$ est fausse, alors cela ne dit rien sur $\mathcal{B}$. En revanche, si $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie et si $\mathcal{B}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est forcément fausse.

Proposition (transitivité de l'implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$ implique la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$.*

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Exemple : *Soient x et y deux réels. Par croissance des fonctions carré et exponentielle sur $\mathbb{R}_+$, les implications « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (x^2 \leqslant y^2)$ » et « $(x^2 \leqslant y^2) \Rightarrow (e^{x^2} \leqslant e^{y^2})$ » sont vraies. Par transitivité de l'implication « $(0 \leqslant x \leqslant y) \Rightarrow (e^{x^2} \leqslant e^{y^2})$ » est vraie.*

2) Négation et contraposée d'une implication

Proposition (négation d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$).*

C'est intuitif ! $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vérifiée si $\mathcal{B}$ est vraie dès que $\mathcal{A}$ l'est. Ainsi, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ n'est pas vérifiée dès que $\mathcal{A}$ est vérifiée sans que $\mathcal{B}$ le soit : $\mathcal{A}$ et (non $\mathcal{B}$).

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\begin{aligned}\text{non}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff \text{non}((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B}) &\iff \text{non}(\text{non } \mathcal{A}) \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}) \\ &\iff \mathcal{A} \text{ et } (\text{non } \mathcal{B}).\end{aligned}$$

□

Proposition (contraposée d'une implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $(\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})$ est équivalente à la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. On l'appelle la contraposée de la proposition $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.*

Ainsi, la contraposée d'une implication lui est équivalente : c'est le principe du raisonnement par contraposée, cf. chapitre 3. Attention à ne pas la confondre avec sa réciproque ! Une implication et sa réciproque sont indépendantes, l'une peut être vraie et l'autre fausse !

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff ((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B}) &\iff \big((\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } \mathcal{B}))\big) \\ &\iff ((\text{non } \mathcal{B}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{A})).\end{aligned}$$

□

Exemple : *Soient A B et C trois points du plan. La contraposée du théorème de Pythagore est : « Si $BC^2 \neq AC^2 + AB^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A ».*

3) Double implication

Proposition (double implication). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à la proposition $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.*

DÉMONSTRATION. On vérifie que $((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}))$ et $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ont la même table de vérité :

Pour montrer que $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on procède soit par équivalences intermédiaires, soit par double implication.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

□

Définition. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions. Pour exprimer que la proposition $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ est vraie, on dit aussi indifféremment :*

- *$\mathcal{A}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{B}$.*
- *$\mathcal{A}$ (est vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (est vraie).*
- *Pour que $\mathcal{A}$ (soit vraie), il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ (soit vraie).*

Et donc on évite à tout prix d'utiliser des équivalences lorsqu'elles ne sont pas requises. C'est prendre un risque inutile de se tromper.

⚠ Une erreur classique est de confondre implication et équivalence. Montrer une équivalence est bien plus contraignant : il faut montrer en plus que l'on peut revenir en arrière (c'est-à-dire montrer l'implication réciproque). Heureusement la majorité du temps en mathématiques, on a seulement besoin de montrer des implications (les équivalences ne sont requises essentiellement que lorsqu'on résout des équations ou inéquations ou lorsque l'énoncé le demande explicitement).

Dans tous les cas relisez-vous : une phrase mathématique, qu'elle soit écrite symboliquement ou avec des phrases, doit toujours avoir un sens sans ambiguïté lorsqu'on la relit à voix haute.

⚠ Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations et ne doivent pas être utilisées comme telles. En général, on ne mélange pas des phrases écrites en français et des phrases utilisant ces symboles. Cela peut créer des ambiguïtés.

Prenons l'exemple de la proposition :

« $\sqrt{x-1}$ est définie si $x-1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 1$ ».

— *Doit-on comprendre que $\sqrt{x-1}$ est définie si l'équivalence ($x-1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 1$) est vraie ? Non bien sûr puisque cette équivalence est « toujours » vraie et $\sqrt{x-1}$ n'est pas « toujours » définie.*

— *On aurait plutôt dû écrire « $\sqrt{x-1}$ est définie si $x-1 \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $x \geqslant 1$ ».*

MÉTHODES

Pour montrer que la proposition $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ **est vraie**, on montre que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies toutes les deux.

Pour montrer que la proposition $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ **est vraie**, on montre que $\mathcal{A}$ est vraie ou que $\mathcal{B}$ est vraie (ou les deux, mais une seule suffit). On peut parfois supposer $\mathcal{A}$ fausse et montrer que $\mathcal{B}$ est vraie.

Pour montrer qu'une proposition $\mathcal{A}$ **implique une proposition** $\mathcal{B}$**,** on peut supposer que $\mathcal{A}$ est vraie, puis montrer alors que $\mathcal{B}$ est vraie.

Dans le chapitre 3, nous verrons d'autres types de raisonnements usuels permettant de montrer des implications. Ils s'appuieront essentiellement sur les règles que nous avons énoncées dans ce chapitre (contraposée, négation d'une implication, etc).

Pour montrer que deux propositions $\mathcal{A}$ **et** $\mathcal{B}$ **sont équivalentes,**

- On peut essayer de raisonner par équivalences intermédiaires ($\mathcal{A}$ est équivalente à une proposition $\mathcal{C}$, équivalente elle-même à une proposition $\mathcal{D}$, etc. enfin équivalente à $\mathcal{B}$).
- On peut raisonner par double inclusion (on montre que $\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ et que $\mathcal{B}$ implique $\mathcal{A}$).

Chapitre 2

Ensembles

LE COURS

Dans ce chapitre, nous nous contenterons de la définition intuitive d'un ensemble ci-dessous.

I Ensembles et éléments

Définition.

- *Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E.*
- *On note $x \in E$ pour dire que l'élément x appartient à E. On note $x \notin E$ pour dire que l'élément x n'appartient pas à E.*
- *Un ensemble ayant un unique élément x est appelé singleton.*
- *On appelle ensemble vide, et on note $\varnothing$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*

II Petite pause quantificateurs

1) Définition

Définition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » signifie que tous les éléments de E vérifient la propriété P. On dit que le symbole $\forall$ est le quantificateur universel.*
- *La proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » signifie qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie la propriété P. On dit que le symbole $\exists$ est le quantificateur existentiel.*
- *La proposition « $\exists!\, x \in E, P(x)$ » signifie qu'un et un seul élément de E vérifie la propriété P.*

Par définition, en mathématique, quand on dit qu'il existe un élément qui vérifie une condition, cela signifie : au moins un. Si on veut dire qu'il y a exactement un élément qui vérifie une condition, on rajoute qu'il est unique.

Exemples :

- *Le fait que la fonction $\cos$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}$ s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leqslant 1$.*
- *Le fait que 2 admet une racine carrée s'écrit : $\exists y \in \mathbb{R}, y^2 = 2$.*
- *Le fait que tout réel positif admet une unique racine carrée positive s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x$.*

Remarques :

- Le quantificateur universel $\forall$ se lit « Pour tout » ou « Quel que soit ». Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « Il existe » (sous-entendu « Il existe au moins un »). Enfin $\exists!$ se lit « Il existe un unique ».
- Le x dans « $\forall x \in E,\ P(x)$ », dans « $\exists x \in E, P(x)$ » et dans « $\exists!\, x \in E, P(x)$ » est une variable dite **muette** (ou **liée**). Cela signifie que :
  — On peut remplacer x par une autre « lettre » (qui n'est pas déjà utilisée pour définir un autre objet).

    On peut écrire « $\forall y \in E,\ P(y)$ » au lieu de « $\forall x \in E,\ P(x)$ ». Ou même « $\forall \heartsuit \in E, P(\heartsuit)$ » !

On mettra parfois des parenthèses pour indiquer la zone de validité d'une variable.

Il n'aura pas échappé aux plus perspicaces de nos lecteurs que « quel que soit » (ou « quels que soient » au pluriel) s'écrit en trois mots ! C'est décidé, nos lecteurs n'écriront donc jamais d'horreurs du type « Quelque soit ».

— Le x n'est pas utilisable dans la suite en tant qu'objet précis (il est **lié** au quantificateur, il a une portée uniquement locale : il n'existe, il n'est défini que dans la proposition). Notamment si on sait que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie et que l'on veut l'utiliser pour démontrer une autre proposition, on commencera par écrire

« Soit x un élément de E qui vérifie la propriété P ».

Dans ce cas le x n'est plus une variable muette mais un objet précis (qui vérifie P). On dit aussi que la variable est **libre**.

On voit qu'on peut exprimer ! en fonction de $\forall$ et $\exists$: on pourrait donc n'utiliser que ces deux quantificateurs, mais cela rendrait certaines propositions beaucoup plus lourdes !

- « $\exists!\ x \in E,\ P(x)$ » est une notation condensée de la proposition

$$\exists x \in E,\ \big(P(x) \text{ et } (\forall y \in E,\ P(y) \ \Rightarrow\ x = y)\big)$$

signifiant deux choses :

— Il existe un unique élément x de E vérifiant P.

— Si un élément y de E vérifie P, alors $y = x$. Autrement dit x est le seul élément de E à vérifier P.

- On fera bien attention à l'ordre des quantificateurs : si P est une propriété portant sur les éléments de deux ensembles E et F, alors les propositions

« $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)$ » et « $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)$ »

Donnons un exemple issu de la vie quotidienne : si on dit « il existe un film que tous les lecteurs de ce livre préfèrent », cela signifie que tous les lecteurs ont le même film préféré (ce qui est sans doute faux), tandis que si on dit « pour tous les lecteurs de ce livre, il existe un film qu'ils préfèrent », cela signifie que tous les lecteurs ont un film préféré, pas forcément le même (ce qui est sans doute vrai). Morale de l'histoire : on ne peut pas intervertir $\exists$ et $\forall$ (sauf cas particulier, mais cela découle alors d'un argument mathématique, cf. exercice 6).

n'ont pas la même signification a priori. La première signifie que, pour chaque élément x de E, il existe y dans F (dépendant éventuellement de x) tel que $P(x,y)$ est vrai. La seconde signifie qu'il existe un y dans F tel que, quel que soit x dans E, $P(x,y)$ est vrai (le y universel : c'est le même pour tous les x). De façon générale, quand un objet est défini après un autre, il peut dépendre de l'objet défini avant.

Illustrons-cela avec un exemple :

— *La proposition « $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y$ » (qui signifie que, pour tout entier naturel x, il existe un entier naturel y tel que $x < y$) est vraie (pour tout x dans $\mathbb{N}$, $y = x + 1$ convient).*

— *La proposition « $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$ » (qui signifie qu'il existe un entier naturel qui est strictement supérieur à tous les entiers naturels) est fausse.*

Par contre, quand deux quantificateurs existentiels (resp. universels) se suivent, on peut les échanger sans changer le sens de la proposition : en effet, si une propriété est vraie pour tous x et y, cela n'a aucune importance de prendre x ou y en premier. De même, s'il existe x et y tels que la propriété soit vraie pour x et y, cela importe peu qui a été choisi d'abord.

- Le quantificateur universel $\forall$ est distributif sur et mais pas sur ou. Le quantificateur existentiel $\exists$ est distributif sur ou mais pas sur et.

Par exemple la proposition « $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) \geqslant 0 \text{ ou } \cos(x) \leqslant 0)$ » n'est pas équivalente à la proposition « $(\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geqslant 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leqslant 0)$ ». En effet la première proposition est vraie mais la seconde est fausse (le cosinus n'est pas de signe constant, cf. chapitre 6).

- Les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ (ainsi que les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$) ne sont pas des abréviations. Ainsi ils ne doivent surtout pas être employés comme des abréviations au milieu d'un texte.

2) Négation d'une proposition contenant des quantificateurs

Proposition. *Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E.*

- *La négation de la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E, \operatorname{non}(P(x))$ ».*
- *La négation de la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E, \operatorname{non}(P(x))$ ».*

Rappel : La négation d'une proposition A est $\operatorname{non}(A)$, la proposition vraie quand A est fausse, et fausse quand A est vraie. Elle ne doit pas être confondue avec « sa parfaite opposée ». Par exemple, la négation de la proposition ci-contre n'est **pas** : « aucun chat n'est gris » ! Nous invitons le lecteur à écouter la radio, la télévision ou à lire des journaux : on confond souvent les deux ! Combien de fois entend-on : « Il est faux de dire que tous les chats sont gris, donc aucun chat n'est gris » ? Morale de l'histoire : les gens devraient davantage étudier les mathématiques...

Exemples :

- *La négation de « Tous les chats sont gris » est « Il existe un chat qui n'est pas gris ».*
- *La négation de « Il y a un élève qui a son permis de conduire » est « Aucun élève n'a son permis de conduire ».*

Remarque : On peut nier une proposition contenant plus d'un quantificateur et plus d'une variable exactement de la même façon. Plus précisément, on cherche à nier une proposition du type :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{l}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_2 \in E_2, \dots, \left\{\begin{array}{l}\forall\\ \exists\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad P(x_1, \dots, x_n)$$

(c'est-à-dire que devant chaque variable x_i se trouve soit un $\forall$ soit un $\exists$) où $P(x_1, \dots, x_n)$ est une propriété dépendant des variables $x_1, \dots, x_n$. **La négation est obtenue en interchangeant $\forall$ et $\exists$ et en niant $P(x_1, \dots, x_n)$:**

$$\left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_1 \in E_1, \left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_2 \in E_2, \dots, \left\{\begin{array}{l}\exists\\ \forall\end{array}\right. x_n \in E_n, \qquad \operatorname{non}(P(x_1, \dots, x_n))$$

Exemple : *La négation de « $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$ » est « $\forall y \in \mathbb{N},\ \exists x \in \mathbb{N},\ x \geqslant y$ ».*

Attention, il ne faut nier que P et pas les appartenances préalables : la négation de « $\forall x \in E, \dots$ » n'est pas « $\exists x \notin E, \dots$ »). Il faut également faire attention car, parfois, on écrit ces appartenances sous une forme condensée, et on peut confondre les appartenances et la propriété P.

- Par exemple, on écrit parfois par abus de notation « $\forall x \leqslant y,\ P(x,y)$ » pour « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow P(x,y)$ ». La négation de cette phrase (version longue) est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \text{ et } \operatorname{non}(P(x,y))$ », c'est-à-dire (version courte) « $\exists x \leqslant y,\ \operatorname{non}(P(x,y))$ », et surtout pas « $\exists x > y,\ \operatorname{non}(P(x,y))$ » !
- De même, « $\forall \varepsilon > 0,\ P(\varepsilon)$ » signifie « $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ P(\varepsilon)$ » et donc sa négation est « $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \operatorname{non}(P(\varepsilon))$ », c'est-à-dire « $\exists \varepsilon > 0,\ \operatorname{non}(P(\varepsilon))$ », et surtout pas « $\exists \varepsilon \leqslant 0,\ \operatorname{non}(P(\varepsilon))$ » !

En pratique, il n'est pas nécessaire de détailler autant, on peut donner la négation « version courte » directement, mais attention à ne pas aller trop vite et à ne pas nier ce qui ne relève pas de la proposition P !

Exemple : *La négation de « $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - L| \leqslant \varepsilon$ » est « $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ |u_n - L| > \varepsilon$ ».*

III Retour aux ensembles

1) Modes de définition d'un ensemble

Il existe plusieurs façons de définir un ensemble. Les trois principales sont les suivantes :

1. Définir un ensemble grâce à des unions, intersections, passages au complémentaire (cf. partie IV) d'ensembles déjà existants. Par exemple, $E = [\,0\,;1\,] \cap \overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des irrationnels appartenant à $[\,0\,;1\,]$.

On dit alors que l'ensemble est défini par extension.

2. Définir un ensemble en donnant explicitement tous ses éléments entre accolades et séparés par des points virgules. Par convention un élément ne figure qu'une seule fois dans la liste.

Exemples :

- $\{0; 1\}$ *est l'ensemble à deux éléments contenant uniquement* 0 *et* 1.
- $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *est l'ensemble à six éléments contenant les entiers de* 1 *à* 6. *On le note également* $[\![1\,;\,6]\!]$ *(cf. chapitre 4).*
- $\{0\}$ *est l'ensemble à un élément contenant uniquement* 0. *On l'appelle « singleton* 0 *». Plus généralement :*

Définition. *Un ensemble à un élément est appelé un singleton. Si on note* x *cet élément, cet ensemble (noté donc* $\{x\}$*) est appelé « singleton* x *».*

Remarque : Inconvénients de ce mode de définition :

- Il nécessite de connaître tous les éléments de l'ensemble.
- Il est difficilement maniable avec un grand nombre d'éléments : on le voit rien qu'avec 6 éléments !

On dit alors que l'ensemble est défini par compréhension.

$\{x \in E \,|\, P(x)\}$ est l'ensemble des éléments x appartenant à E tels que $P(x)$ soit vraie. En d'autres termes, c'est l'ensemble des éléments de l'ensemble se situant à gauche de la barre verticale vérifiant la propriété à droite de cette barre. Ou enfin : si $x \in E$, alors x appartient à cet ensemble si et seulement si $P(x)$ est vraie. Avec le dernier exemple ci-contre : « soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $x \in S \iff x^5 - 3x - 1 = 0$ ». Une rapide étude de fonction couplée au théorème de la bijection prouve que cet ensemble comporte trois éléments car l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ a trois solutions. Cependant, on ne les connaît pas, ce qui n'empêche pas de définir S !

3. Définir un ensemble par une propriété caractérisant ses éléments. Plus précisément, si P est une propriété, on note $\{x \in E \,|\, P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P. Détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}} \quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Nature des éléments} \\ \text{de l'ensemble} \\ \text{(réels, entiers etc.)}}} \quad \underbrace{|}_{\substack{\text{barre verticale} \\ \text{de séparation :} \\ \text{lire « tels que »}}} \quad \underbrace{\cdots}_{\substack{\text{Propriété(s) vérifiée(s)} \\ \text{par les éléments} \\ \text{de l'ensemble}}} \quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

Remarque : Nous nous intéressons seulement à la façon d'écrire un ensemble. Les notions mathématiques présentes ci-dessous (fonctions paires etc.) seront vues dans des chapitres ultérieurs.

Exemples :

- $P = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ *est l'ensemble des fonctions* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = f(x)$. *En d'autres termes, c'est l'ensemble des fonctions paires.*
- $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$ *est l'ensemble des réels dont le carré vaut* 1. *En d'autres termes, c'est l'ensemble à deux éléments* $\{-1; 1\}$.
- $\pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(x) = 0\}$ *est l'ensemble des réels* x *tels que* $\sin(x) = 0$. *En d'autres termes, c'est l'ensemble des réels congrus à* 0 *modulo* π.
- $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f$ *dérivable sur* $\mathbb{R}$, $f'(0) = f'(1) = 0\}$ *est l'ensemble des fonctions* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *dérivables et vérifiant* $f'(0) = f'(1) = 0$.
- $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^5 - 3x - 1 = 0\}$ *est l'ensemble des réels* x *solutions de l'équation* $x^5 - 3x - 1 = 0$.

Remarque : Avantages de ce mode de définition :

- Il permet de définir et de manipuler facilement des ensembles infinis.
- Il n'est pas nécessaire de connaître explicitement tous les éléments de l'ensemble pour le définir. C'est particulièrement frappant avec les deux derniers exemples ci-dessus : on serait particulièrement en peine de donner toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0) = f'(1) = 0$, et on ne sait pas résoudre l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$. On ne sait même pas, au premier abord, combien de solutions cette équation possède !

Remarque : L'ensemble des entiers naturels pairs (parfois noté $2\mathbb{N}$) peut être écrit de la façon suivante :

$$2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{N},\, n = 2k\}$$

mais c'est tout de même une notation assez lourde. On utilisera plutôt la notation plus concise $2\mathbb{N} = \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Plus généralement, si $f : E \longrightarrow F$ est une application (nous reverrons donc cette notation dans le chapitre 7) et si A est une partie de E, on note $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ ou $f(A)$ l'ensemble des images par f des éléments de A. On peut lire : « $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ est l'ensemble formé des $f(x)$ quand x parcourt A ». Là aussi, détaillons cette notation :

$$\underbrace{\{}_{\text{accolade}} \quad \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{Éléments de} \\ \text{l'ensemble : images} \\ \text{d'un paramètre} \\ x \text{ par } f}} \quad \underbrace{|}_{\substack{\text{barre verticale} \\ \text{de séparation}}} \quad \underbrace{x \in A}_{\substack{\text{Le paramètre} \\ \text{et l'ensemble} \\ \text{qu'il parcourt}}} \quad \underbrace{\}}_{\text{accolade}}$$

Là aussi, précisons une chose (encore une fois, nous reverrons cette notation dans le chapitre 7) : si $f : E \longrightarrow F$,

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

est l'ensemble des images par f des éléments de A. En d'autres termes, un élément de F appartient à cet ensemble si et seulement s'il s'écrit sous la forme $f(x)$ avec $x \in A$. Avec des quantificateurs, cela donne : « Soit $y \in F$. Alors : $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$ ». Cette équivalence est à connaître sur le bout des doigts ! Par exemple, avec l'ensemble E ci-contre : « Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $x \in E \iff \exists n \in \mathbb{N},\, x = u_n$ ». Attention x n'est pas forcément un entier !

Exemples :

- *$C = \left\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ est l'ensemble des carrés parfaits.*
- *Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (donc une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, cf. chapitre 8), $E = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des termes de la suite.*
- $\{\sin(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = [\,-1\,;1\,]$.

2) Comparaison d'ensembles

Définition. *On dit que deux ensembles E et F sont égaux, et on note $E = F$, si ils ont les mêmes éléments.*

Remarque : Avec des quantificateurs : $\forall x,\, x \in E \iff x \in F$. On peut donc prouver que deux ensembles sont égaux en raisonnant par équivalences, cf. partie IV (mais, en général, on raisonnera par double inclusion : voir ci-dessous et chapitre 3).

Un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble, il n'y a pas de notion d'ordre ou de multiplicité (il appartient ou non à l'ensemble, il ne peut pas lui appartenir plusieurs fois). Par exemple, les trois ensembles $\{0;1\}, \{0;0;1\}$ et $\{1;0\}$ sont égaux : ils contiennent 0 et 1 et aucun autre élément, ils ont les mêmes éléments donc sont égaux.

Définition. *Soient E et F deux ensembles.*

- *On dit que F est inclus dans E, et on note $F \subset E$, si : $\forall x \in F,\, x \in E$.*
- *Si F n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$.*
- *Si $F \subset E$ et $F \neq E$, on dit que l'inclusion est stricte et on note $F \subsetneq E$.*

Pour quantifier $F \subset E$, on trouve aussi l'écriture suivante :

$$\forall x,\, x \in F \Rightarrow x \in E$$

En particulier, l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles. En effet, on a vu (cf. chapitre 1) que si A est fausse, alors $A \Rightarrow B$ est vraie. Par conséquent, si F est l'ensemble vide et si E est un ensemble quelconque, l'assertion « $x \in F$ » est fausse donc l'implication ci-dessus est vraie.

Remarque : Ne pas confondre $\subset$ et $\in$. Par exemple, si $E = \{0;1;2\}$, alors $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$. On ne parle d'inclusion que pour des ensembles : un ensemble est **inclus** dans un autre si tous ses éléments **appartiennent** au second ensemble, cf. exercice 1.

Remarques :

- Tout ensemble est inclus dans lui-même.
- Pour montrer que F est inclus dans E, on se donne un élément x de F et on montre que x est un élément de E. On commence donc par écrire « Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$. »
- Par transitivité de l'implication, si E, F et G sont des ensembles tels que $G \subset F$ et $F \subset E$, alors $G \subset E$.

Exemples :

- *Nous avons* $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.
- *Notons* $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$. *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *alors elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *(cf. chapitre 11). Ainsi* $D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on montrera souvent que l'un est inclus dans l'autre et vice versa (cf. exercice 5). On dit qu'on procède par double inclusion. Raisonnement très classique !

Il résulte de la définition l'équivalence (importante !) suivante :

Proposition (double inclusion). *Si* E *et* F *sont deux ensembles, alors on a :*

$$E = F \qquad \Longleftrightarrow \qquad (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

3) Parties d'un ensemble

Définition. *Soient* E *et* F *deux ensembles. Si* F *est inclus dans* E, *on dit que* F *est une partie de* E *ou un sous-ensemble de* E.

L'ensemble des parties de E est un ensemble d'ensembles, ce qui le rend difficilement maniable, et on ne sait pas l'expliciter en général (sauf si E est fini, voir ci-contre) ce qui entraîne parfois des confusions entre parties de E et éléments de E. En particulier, puisqu'on n'explicite que rarement $\mathscr{P}(E)$, les élèves ont souvent du mal à répondre à cette simple question : quand un ensemble A appartient-il à $\mathscr{P}(E)$? L'équivalence ci-dessus permet de répondre simplement et sans erreur possible à cette question, et donc cette équivalence doit être sue sur le bout des doigts.

Définition. *Soit* E *un ensemble. On note* $\mathscr{P}(E)$ *l'ensemble des parties de* E. *On a alors :*

$$A \in \mathscr{P}(E) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset E.$$

Exemples : *Quand* E *est un ensemble fini, on peut facilement donner tous les éléments de* $\mathscr{P}(E)$ *(du moins en théorie...* $\mathscr{P}(E)$ *a beaucoup d'éléments : on peut montrer, cf. chapitre 13, que, si* E *a* n *éléments, alors* $\mathscr{P}(E)$ *a* 2^n *éléments) : il suffit de faire varier* k *de* 0 *à* n *et de donner toutes les parties de* E *à* k *éléments (et pour cela on prend* k *éléments de* E *de toutes les façons possibles) qu'on met entre accolades (définition par extension).*

- $\mathscr{P}(\{0;1\}) = \{\varnothing, ; \{0\}; \{1\}; \{0,1\}\}$ *: comme dit ci-dessus,* $\mathscr{P}(\{0;1\})$ *contient les parties à zéro élément (l'ensemble vide), les ensembles à un élément (les singletons* $\{0\}$ *et* $\{1\}$*) et les ensembles à deux éléments (*$\{0;1\}$ *lui-même). De même,* $\mathscr{P}(\{P;F\}) = \{\varnothing; \{P\}; \{F\}; \{P,F\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing; \{1\}\}$ *et* $\mathscr{P}(\{\square\}) = \{\varnothing; \{\square\}\}$.
- *Le seul ensemble inclus dans l'ensemble vide est lui-même donc* $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
- $\mathscr{P}(\{-1;0;1\}) = \{\varnothing; \{0\}; \{-1\}; \{1\}; \{0;1\}; \{0;-1\}; \{1;-1\}; \{0;1;-1\}\}$ *(les ensembles à zéro élément, puis les ensembles à un élément, puis les ensembles à deux éléments, puis les ensembles à trois éléments).*
- *Si on lance un dé à 6 faces, on peut coder le résultat par un élément de* $\Omega = [\![1 \,;\, 6]\!]$. *En langage probabiliste on dira que* Ω *est l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé. On appellera toute partie de* Ω *un événement. Par exemple* $\{1;3;5\}$ *correspond à l'événement « obtenir un chiffre impair ». Ainsi* $\mathscr{P}(\Omega)$ *est l'ensemble des événements (cf. chapitre 14). On ne l'explicite pas ici car il a* 64 *éléments !*

Remarques :

- $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.
- $\{x\} \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow \{x\} \subset E \Longleftrightarrow x \in E$,

4) Produit cartésien

On se donne dans ce paragraphe deux ensembles non vides E et F.

Définition. *On appelle couple d'éléments de E et F la donnée d'un élément e de E et d'un élement f de F, dans cet ordre, et que l'on note (e, f).*

On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (e, f) d'éléments de E et F. En d'autres termes :

$$E \times F = \{(x, y) \,|\, x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Si $E = F$, on le note E^2 au lieu de $E \times E$.

Le produit cartésien $E \times F$ se prononce « E croix F » ou « E fois F ».

Exemples :

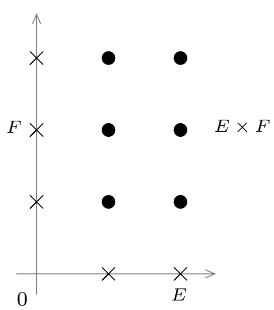
- *Si $E = \{1; 2\}$ et $F = \{1; 2; 3\}$, alors :*
  - $E \times F = \big\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3)\big\}$.
  - $F \times E = \big\{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2)\big\}$.
- *Le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples de réels. On l'identifie parfois au plan (en identifiant un point à ses cordonnées dans un repère orthonormé).*
- *$[\![1\,;\,6]\!]^2$ est l'univers que l'on associera à l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés à 6 faces (consécutivement ou en même temps).*

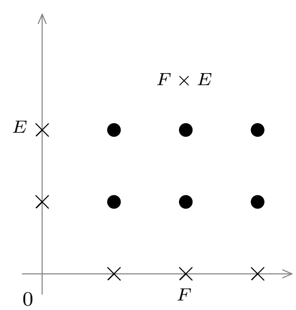
Contrairement aux ensembles, ici, l'ordre compte ! Le couple (a, b) n'est pas égal au couple (b, a) quand $a \neq b$. Pour bien visualiser ceci, il suffit de voir que, dans le dessin ci-dessous, le couple $(1, 2)$ et le couple $(2, 1)$ ne sont pas représentés par le même point.

Comme on le voit sur le premier exemple, $E \times F \neq F \times E$ en général !

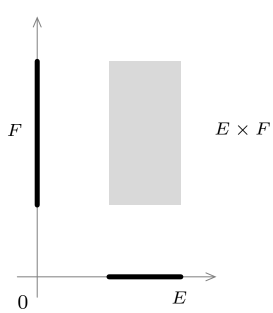
Remarque : Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on peut voir le produit $E \times F$ comme l'ensemble de tous les points d'abscisse appartenant à E et d'ordonnée appartenant à F. Ci-dessous, à gauche, nous avons représenté $E \times F$, et à droite, $F \times E$:

Cette représentation graphique peut être utile pour bien comprendre que $E \times F$ n'est pas un ensemble du même type que E ou F : par exemple, si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, alors $E \times F$ est une partie de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une partie du plan. De plus, cette représentation aide également à comprendre qu'en général, $E \times F \neq F \times E$, et qu'un couple (a, b) n'est pas égal en général au couple (b, a).

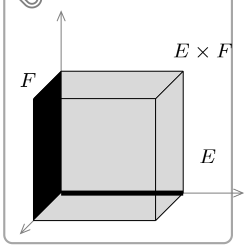




Autre exemple : si $E = [\,1\,;2\,]$ et $F = [\,1\,;3\,]$ (attention à ne pas les confondre avec $\{1; 2\}$ et $\{1; 2; 3\}$), alors on peut voir $E \times F$ comme le rectangle du plan ci-dessous :



On peut généraliser cette notion : si $E = [\,0\,;1\,]$ et si $F = [\,0\,;1\,]^2$ est le carré du plan formé par les points $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ et $(1, 0)$, alors $E \times F$ est le cube $[\,0\,;1\,]^3$ formé



par les huit points dont les trois coordonnées sont 0 ou 1 (voir le dessin ci-contre) . Au delà, c'est toujours possible, mais cela devient difficile à visualiser !

Plus généralement :

Définition. *Soit n un entier naturel supérieur à 2. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles non vides. On appelle n-uplet d'éléments de $E_1, \dots, E_n$ la donnée d'un élément e_1 de E_1, d'un élément e_2 de E_2, etc. puis d'un élément e_n de E_n, dans cet ordre, et que l'on note $(e_1, \dots, e_n)$.*

On appelle produit cartésien de $E_1, \dots, E_n$, et on note $E_1 \times \cdots \times E_n$, l'ensemble des n-uplets d'éléments de $E_1, \dots, E_n$.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on le note E^n au lieu de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Ne pas confondre $(x_1, \dots, x_n)$ avec l'ensemble $\{x_1; \dots; x_n\}$. Par exemple le triplet $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$ n'est pas l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; 2\}$.

Exemple : *Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note donc $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels. En particulier, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, qu'on identifiera parfois à l'espace, de la même façon qu'on a identifié $\mathbb{R}^2$ au plan.*

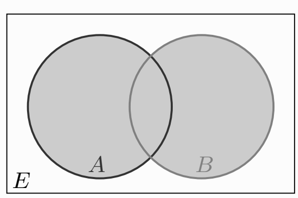
Remarque : La notion de produit cartésien permet aussi un raccourci de notations. Par exemple on pourra écrire « $\forall (x, y, z) \in E^2 \times F$ » au lieu de « $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in F$ » . Idem avec les « $\exists$ ».

IV Opérations sur les parties d'un ensemble

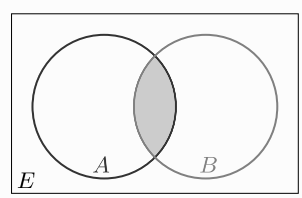
Dans toute la suite, E désigne un ensemble non vide.

1) Union et intersection

Définition. *Soient A et B deux parties de E. On définit les parties de E :*



$A \cup B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$,
l'union (ou réunion) de A et B.



$A \cap B = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B \,\}$,
l'intersection de A et B.

En d'autres termes, un élément appartient à l'intersection quand il appartient à tous les ensembles, et un élément appartient à l'union quand il appartient à au moins un des ensembles. Ce sera la même chose avec des intersections de plus de deux ensembles (voir ci-dessous).

Remarque : En d'autres termes, si $x \in E$:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B, \qquad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B.$$

Exemple : $[\,0\,;2\,] \cap [\,1\,;3\,] = [\,1\,;2\,]$ *et* $[\,0\,;2\,] \cup [\,1\,;3\,] = [\,0\,;3\,]$.

Définition. *Deux parties A et B de E sont dites disjointes si $A \cap B = \varnothing$. Dans ce cas, on dit que $A \cup B$ est une union disjointe.*

Deux ensembles disjoints sont évidemment distincts, mais la réciproque est fausse : $[\,0\,;2\,]$ et $[\,1\,;3\,]$ sont distincts mais pas disjoints.

Attention de ne pas confondre distincts et disjoints :

- A et B sont distincts (c'est-à-dire $A \neq B$) si et seulement s'ils n'ont pas les mêmes éléments, c'est-à-dire s'il existe un élément dans un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Avec des quantificateurs :

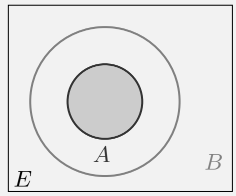
$$(\exists x \in A,\, x \notin B) \text{ ou } (\exists x \in B,\, x \notin A).$$

- A et B sont disjoints si et seulement si leur intersection est vide, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun. Avec des quantificateurs :

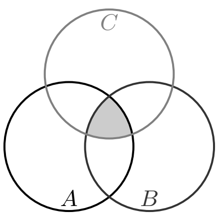
$$(\forall x \in A,\, x \notin B) \text{ et } (\forall x \in B,\, x \notin A).$$

Proposition. *Soient A, B et C des parties de E .*

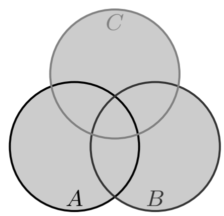
- *(commutativité)* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$,
- *(associativité)* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *et* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- *(distributivité)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *et* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$ *et* $(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$.
- $A \cap A = A$ *et* $A \cup A = A$,
- $\varnothing \cap A = \varnothing$ *et* $\varnothing \cup A = A$,
- $A \cap B = A \iff A \subset B$ *(voir dessin ci-contre)*
- $E \cap A = A$ *et* $E \cup A = E$.



$\rightsquigarrow$ Exercice.



$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$

La distributivité pose souvent problème : comment ne pas se tromper ? Pour développer (de gauche vers droite) c'est facile, on peut utiliser des flèches au brouillon. Mais pour factoriser (de droite vers gauche) ? En faisant l'analogie avec deux lois, dont l'une est distributive par rapport à l'autre : la multipliciation et l'addition. Par exemple (cf. exercice 3), si on veut donner une expression plus simple de

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \overline{C})$$

alors on écrit l'analogue avec les lois $+$ et $\times$ au brouillon :

$$(a \times b \times c) + (a \times b \times \tilde{c})$$

ce qu'on factorise en $a \times ((b \times c) + (b \times \tilde{c}))$. Finalement, l'ensemble ci-dessus est égal, par distributivité de l'union sur l'intersection, à

$$A \cup ((B \cup C) \cap (B \cup \overline{C}))$$

Attention, ce n'est qu'une analogie !

Remarque : L'associativité de la réunion (resp. de l'intersection) nous permet d'écrire : $A \cup B \cup C$ (respectivement $A \cap B \cap C$) au lieu de $A \cup (B \cup C)$ (respectivement $A \cap (B \cap C)$). En effet, on peut définir de façon analogue l'union ou l'intersection de plus de deux ensembles :

Définition. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (i.e. une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) indexée par un ensemble non vide I . On définit :*

- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \,|\, \exists i \in I,\, x \in A_i \,\}$, *l'union de la famille $(A_i)_{i \in I}$.*
- $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{\, x \in E \,|\, \forall i \in I,\, x \in A_i \,\}$, *l'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$.*

Là aussi, un élément appartient à l'intersection quand il appartient à tous les ensembles, et un élément appartient à l'union quand il appartient à au moins un des ensembles.

Remarques :

- (Écriture avec des quantificateurs) Soit $x \in E$.

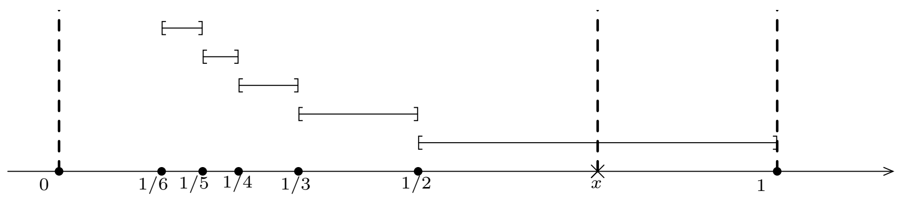
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i \qquad \text{et} \qquad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

- Si $I = [\![p\,;\, n]\!]$ (l'ensemble des entiers compris entre p et n, cf. chapitre 4) avec p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$, alors on note $\displaystyle\bigcup_{i=p}^{n}$ au lieu de $\displaystyle\bigcup_{i \in I}$ (de même pour l'intersection). De même, si $I = \mathbb{N}^*$, on note $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty}$ au lieu de $\displaystyle\bigcup_{i \in I}$.

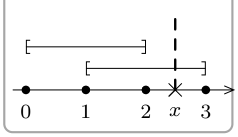
On peut évidemment généraliser à $\mathbb{N}$ (on a alors l'union de 0 à $+\infty$), à $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant 2\}$ (on a alors l'union de 2 à $+\infty$), etc.

Exemples :

- *Nous verrons dans le chapitre 6 que :*
  — $\tan$ *est définie sur* $\mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
  — $\ln\circ\sin$ *est définie sur* $\{x\in\mathbb{R}\mid\sin(x)>0\}=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]\,2k\pi\,;(2k+1)\pi\,[$.
- *Montrons que* $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]=\,]\,0\,;1\,]$ *et que* $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]=\varnothing$. *Cela se voit très bien sur le dessin suivant :*



Faisons un dessin analogue pour illustrer le premier exemple de ce paragraphe, à savoir l'union et l'intersection de $[\,0\,;2\,]$ et $[\,1\,;3\,]$:



Nous avons représenté les intervalles de la forme $\left[\dfrac{1}{k+1}\,;\dfrac{1}{k}\right]$ *les uns au-dessus des autres pour des raisons de lisibilité. Rappelons (il est fondamental de comprendre ce point) qu'un élément* x *est dans l'union quand il appartient à* ***au moins*** *l'un des ensembles, et dans l'intersection quand il est dans* ***tous*** *les ensembles. On voit sur le dessin (mais nous allons le montrer rigoureusement ci-dessous) qu'il n'y a aucun réel* x *qui soit dans tous les intervalles, et que tout réel dans* $]\,0\,;1\,]$ *(*0 *est ouvert car les intervalles se rapprochent de* 0 *sans jamais l'atteindre) est dans au moins un intervalle.*

— *Tout d'abord,* $\left[\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{3}\right]\cap\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]=\varnothing$ *: il n'existe aucun réel qui soit dans ces deux intervalles et donc, a fortiori, il n'existe aucun réel qui soit dans tous les intervalles, c'est-à-dire que l'intersection est vide.*

— *Montrons à présent que l'union (que l'on note* U*) est égale à* $]\,0\,;1\,]$ *par double inclusion. Soit* $x\in U$. *Il existe* $k\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $x\in\left[\dfrac{1}{k+1}\,;\dfrac{1}{k}\right]$. *Or,* $0<\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k}\leqslant 1$ *et donc* $x\in\,]\,0\,;1\,]$. *Ainsi* $U\subset\,]\,0\,;1\,]$.

Nous utilisons la partie entière, dont nous donnons la définition et les propriétés dans le chapitre 4.

— *Soit* $x\in\,]\,0\,;1\,]$. *Alors* $\dfrac{1}{x}\geqslant 1$ *et donc* $\ell=\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\in\mathbb{N}^*$. *Comme* $\ell\leqslant\dfrac{1}{x}<\ell+1$, *nous avons* $\dfrac{1}{\ell+1}<x\leqslant\dfrac{1}{\ell}$. *Par conséquent* $x\in\left[\dfrac{1}{\ell+1}\,;\dfrac{1}{\ell}\right]$ *:* x *appartient à l'un des ensembles donc il appartient à leur union, c'est-à-dire que* $x\in U$. *D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.*

Proposition (distributivité). *Soient* B *une partie de* E *et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de parties de* E. *Nous avons :*

- $\displaystyle\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$.
  On dit que l'intersection est distributive par rapport à l'union.
- $\displaystyle\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\cup B=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B)$.
  On dit que l'union est distributive par rapport à l'intersection.

Démonstration. Montrons le premier point (l'autre est analogue). Plutôt que de raisonner par double inclusion, raisonnons pour une fois par équivalences. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B \quad & \iff \quad (\exists i \in I,\, x \in A_i) \text{ et } (x \in B) \\ & \iff \quad \exists i \in I,\, (x \in A_i \text{ et } x \in B) \\ & \iff \quad \exists i \in I,\, x \in A_i \cap B \\ & \iff \quad x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B). \end{aligned}$$

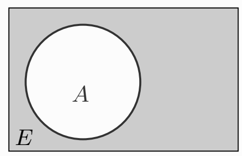
Un élément appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième : il en découle que ces deux ensembles ont les mêmes éléments, donc qu'ils sont égaux. $\square$

Comme expliqué dans le chapitre 3, raisonner par équivalences est plus rapide mais n'est pas toujours possible, ce n'est qu'avec de l'expérience qu'on apprend à repérer les cas où c'est possible. Dans le doute, raisonner par double inclusion.

2) Complémentaire

Définition. *Soit A une partie de E.*

L'ensemble $\overline{A} = \{\, x \in E \,|\, x \notin A \,\}$ est une partie de E appelée complémentaire de A dans E.



Il peut y avoir ambiguïté. Par exemple, si on demande le complémentaire de $A = [\,0\,;1\,]$, doit-on donner le complémentaire de A vu comme une partie de $\mathbb{R}$ (et alors son complémentaire est $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$) ou comme une partie de $\mathbb{R}_+$ (et alors son complémentaire est $]\,1\,;+\infty\,[$) ? On notera $\complement_E A$ le complémentaire de A en tant que partie de E s'il y a une ambiguïté (ce qui n'arrivera que très peu voire jamais en pratique) .

Remarque : Pour tout $x \in E$, nous avons donc

$$x \in \overline{A} \quad \iff \quad x \notin A \quad \iff \quad \text{non}(x \in A).$$

Proposition. *Soient A et B des parties de E. On a*

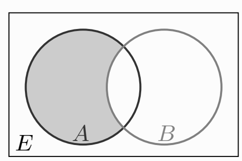
$$\overline{\varnothing} = E, \qquad \overline{E} = \varnothing, \qquad \overline{\overline{A}} = A, \qquad A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}.$$

⇝ Exercice.

Définition (différence). *Soient A et B deux parties de E. L'ensemble*

$$A \backslash B = A \cap \overline{B} = \{\, x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B \,\}$$

est une partie de E appelée différence de A et B (et on note aussi parfois $A - B$). On l'appelle aussi « A privé de B ».



3) Liens entre les différentes opérations : lois de Morgan

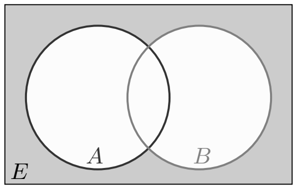
Proposition (lois de Morgan). *Si A et B sont des parties de E, alors*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

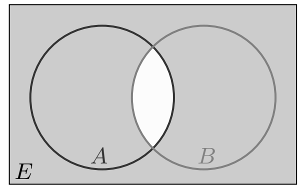
Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E indexée par un ensemble non vide I, alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Nous avons déjà vu des lois de Morgan dans le chapitre 1. Ce sont en fait les mêmes ! Il y a en effet un lien très fort entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques : le « et » logique est l'analogue de l'intersection, le « ou » est l'analogue de l'union, le « non » est l'analogue du passage au complémentaire, l'implication logique est l'analogue de l'inclusion, et l'équivalence logique est l'analogue de l'égalité (ensembliste). On voit alors que la loi de Morgan $\text{non}(A \text{ et } B) \iff (\text{non}(A)) \text{ ou } (\text{non}(B))$ est « la même » que la loi de Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.



$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration. Montrons la seconde égalité par équivalences (la première est laissée en exercice au lecteur) :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} &\iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\iff \text{non}\big(\exists i \in I,\, x \in A_i\big) \\ &\iff \forall i \in I,\, x \notin A_i \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \end{aligned}$$

□

MÉTHODES

Pour prouver une proposition du type « $\forall x \in E,\ P(x)$ », on fixe un élément x dans E, et on montre que $P(x)$ est vraie. Attention, si on écrit : « $\forall x \in E,$ », ce qui suit n'a qu'une portée locale. Pour pouvoir utiliser librement x, il faut commencer par : « Soit $x \in E$ » (ou une variante : « Considérons $x \in E$ », « Fixons $x \in E$ » etc.).

Pour prouver une proposition du type « $\exists x \in E,\ P(x)$ », il faut exhiber un élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie. Il y a de nombreuses méthodes pour de nombreux cas de figure, que l'on verra dans cet ouvrage : utiliser le TVI, résoudre une équation, prouver qu'une fonction est surjective etc. En tout cas, il ne faut pas essayer de montrer qu'un élément x quelconque convient, ni de montrer que tous les éléments de E conviennent !

Pour prouver une proposition du type « $\exists! x \in E,\ P(x)$ », il y a plusieurs façons de faire, nous renvoyons au chapitre 3 : on peut raisonner par analyse-synthèse, on peut prouver l'existence comme ci-dessus puis prouver l'unicité (en écrivant, par exemple : « Soient $(x, y) \in E^2$ vérifiant P, et montrons que $x = y$ »), on peut (quand c'est possible) utiliser le théorème de la bijection etc.
Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on fixe un élément de E et on prouve qu'il appartient à F. On attend donc une rédaction du type :

Soit $x \in E$.
⋮
Alors $x \in F$. En d'autres termes, $E \subset F$.

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on peut

- raisonner par double inclusion, c'est-à-dire prouver que $E \subset F$ et $F \subset E$. On se ramène donc (deux fois) au cas ci-dessus.
- raisonner par équivalences, c'est-à-dire prouver qu'un élément x appartient à E si et seulement s'il appartient à F.

Pour montrer qu'un élément x appartient à une intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, on montre que, pour tout $i \in I$, $x \in A_i$. On se ramène donc au premier cas ci-dessus : on commence par « Soit $i \in I$ ».

Pour montrer qu'un élément x appartient à une union $\bigcup_{i \in I} A_i$, on montre qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. On se ramène donc au deuxième cas ci-dessus : on essaye de trouver un indice i tel que $x \in A_i$.

Pour prouver que deux ensembles sont disjoints, on peut

- raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe un élément x dans l'intersection et on arrive à une absurdité.
- fixer un élément x et prouver qu'il n'appartient pas à l'intersection. Ainsi, aucun élément n'appartient à l'intersection donc celle-ci est vide.

Pour montrer qu'un ensemble A appartient à $\mathscr{P}(E)$, on montre que A est inclus dans E. On se ramène au quatrième point ci-dessus : on commence donc par « Soit $x \in A$. ».

EXERCICES

Certains exercices utilisent des résultats de chapitres ultérieurs. Plus précisément :

- L'exercice 5 utilise des résultats du chapitre 8.
- L'exercice 6 utilise des résultats du chapitre 6.

Exercice 1. ✪ Vrai ou faux ?

1) $0 \in \mathbb{R}$.
2) $\{0\} \in \mathbb{R}$.
3) $0 \subset \mathbb{R}$.
4) $\{0\} \subset \mathbb{R}$.
5) $0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
6) $\{0\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
7) $0 \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
8) $\{0\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Correction :

1) **Vrai.**
2) **Faux :** $\{0\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, pas un réel.
3) **Faux :** 0 n'est pas un ensemble, et on ne parle d'inclusion que pour les ensembles.
4) **Vrai :** $0 \in \mathbb{R}$ donc $\{0\} \subset \mathbb{R}$.
5) **Faux :** 0 n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.
6) **Vrai :** $0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\{0\} \subset \mathbb{R}$, et on rappelle (cf. paragraphe III.3) l'équivalence suivante : $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \iff A \subset \mathbb{R}$.
7) **Faux :** 0 n'est pas un ensemble, et on ne parle d'inclusion que pour les ensembles.
8) **Faux :** Rappelons qu'un ensemble est inclus dans un autre quand tous ses éléments appartiennent à l'autre ensemble. Or, $0 \notin \mathscr{P}(\mathbb{R})$ donc $\{0\}$ n'est pas inclus dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. ✪ Nier les affirmations suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = 0$.
3) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant 0)$.
4) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
5) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$.
6) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
7) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.
8) $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$.
9) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.
10) $\exists x \in \mathbb{R}, (e^x = 2 \text{ et } (\forall y \in \mathbb{R}, e^y = 2 \Rightarrow y = x))$
11) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f,$ $|x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.
12) ✪✪ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$ $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$
13) ✪✪ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y)$

Correction :

1) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$.
2) $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n \neq 0$.
3) $(\exists x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) < 0)$ et $(\exists x_2 \in \mathbb{R}, f(x_2) > 0)$. Il n'est pas nécessaire de différencier les deux variables, mais on fera des raisonnements analogues dans la suite du cours, et il faudra prendre le réflexe de les différencier (puisque x_1 et x_2 sont forcément distincts).
4) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
5) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$.
6) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \text{ et } f(x) \geqslant f(y)$.
7) $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie et $P(n+1)$ fausse.
8) $\exists A > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n < A$.
9) $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
10) $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x \neq 2 \text{ ou } (\exists y \in \mathbb{R}, e^y = 2 \text{ et } y \neq x))$
11) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D_f, |x - a| \leqslant \eta$ et $|f(x) - L| > \varepsilon$.
12) $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \text{ et } \mathrm{non}(\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$.
 $\mathrm{non}(\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$ n'est pas $\lambda_1 \neq \cdots \neq \lambda_n \neq 0$! Pour donner la négation, on se ramène à ce qu'on sait faire : des propriétés écrites avec des et, des ou, des non et des implications. Il suffit de voir que : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \iff (\lambda_1 = 0) \text{ et } (\lambda_2 = 0) \text{ et } \cdots \text{ et } (\lambda_n = 0)$.
 Finalement, la négation voulue est :
$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \text{ et } \big((\lambda_1 \neq 0) \text{ ou } \cdots \text{ ou } (\lambda_n \neq 0)\big)$$
 ce qu'on peut reformuler en : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls. D'ailleurs, nous aurions pu trouver directement cette formulation en réfléchissant au sens de la propriété que nous nions : dire que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ revient à dire que les λ_i sont tous nuls, et la négation est bien que les λ_i sont non tous nuls. Parfois, réflechir au sens fait gagner du temps ! On s'en rendra compte avec l'exemple suivant.
13) $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \text{ et } (\forall z \in \mathbb{Q}, \mathrm{non}(x < z < y))$. Là aussi, attention : $\mathrm{non}(x < z < y)$ n'est pas $x > z > y$. Il suffit de voir que $x < z < y \iff (x < z) \text{ et } (z < y)$. Finalement, la négation cherchée est : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x < y) \text{ et } (\forall z \in \mathbb{Q}, (x \geqslant z) \text{ ou } (z \geqslant y))$. Nous aurions pu aussi nous en sortir en réflechissant au sens et en reformulant : $x < z < y$ signifie que $z \in \,]\,x\,;y\,[$, ce qui est trivial à nier ! La négation est $z \notin \,]\,x\,;y\,[$ ou, ce qui revient au même, $(z \leqslant x)$ ou $(z \geqslant y)$, ce qui est bien ce que nous avons trouvé.

Exercice 3. ✪✪ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que
$$(A \cup B \cup C) \cap \big(A \cup B \cup \overline{C}\big) \cap \big(A \cup \overline{B} \cup C\big) = A \cup (B \cap C)$$

Correction : Notons D l'ensemble de gauche. L'union est distributive par rapport à l'intersection (c'est-à-dire que $(F \cup G) \cap (F \cup H) = F \cup (G \cap H)$ pour tous ensembles F, G, H) donc, on a successivement :
$$(A \cup B \cup C) \cap \big(A \cup B \cup \overline{C}\big) = A \cup \big((B \cup C) \cap (B \cup \overline{C})\big) = A \cup (B \cup (C \cap \overline{C}))$$
Or, $C \cap \overline{C} = \varnothing$ et $B \cup \varnothing = B$, si bien que l'ensemble ci-dessus est égal à $A \cup B$. Finalement, toujours par distributivité de l'union sur l'intersection : $D = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) = A \cup \big(B \cap (\overline{B} \cup C)\big)$.
Or, par distributivité, cette fois, de l'intersection sur l'union, il vient :
$$B \cap (\overline{B} \cup C) = \big(B \cap \overline{B}\big) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup (B \cap C) = B \cap C$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 4. ✪✪ Soit E un ensemble et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0, B_n \subset B_{n+1}$ et que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

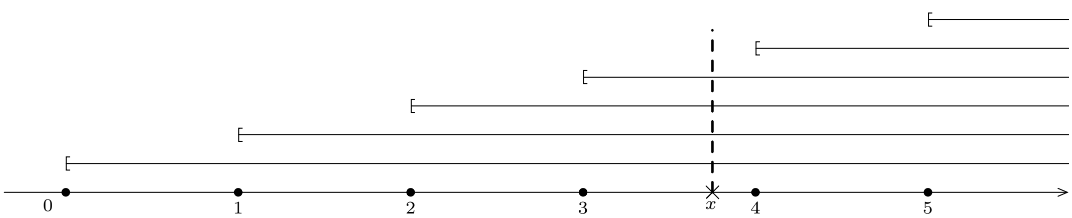
Correction : Soit $n \geqslant 0$. Alors : $B_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} = B_n \cup A_{n+1}$. Dès lors, $B_n \subset B_{n+1}$ (on rappelle que, pour tous A et B, $A \subset A \cup B$). Montrons l'égalité des unions par double inclusion. Notons U_A l'union des A_n, et U_B l'union des B_n.

- Soit $x \in U_B$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Ainsi, il existe $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ tel que $x \in A_k$, si bien que $x \in U_A$. En d'autres termes, $U_B \subset U_A$.
- Soit $x \in U_A$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_n$. Or, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$. En particulier, $A_n \subset B_n$ donc $x \in B_n$, si bien que $x \in U_B$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

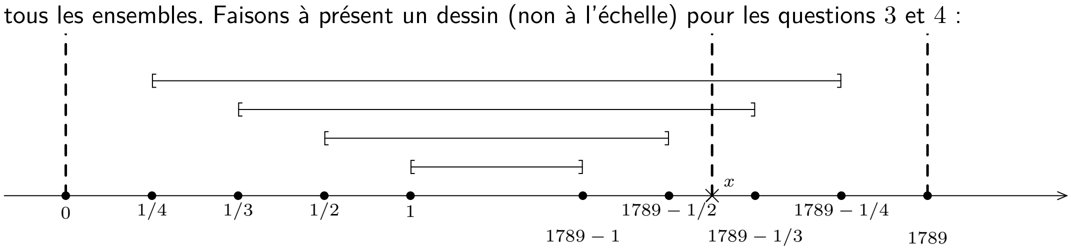
Exercice 5. ✪✪✪ Expliciter les unions et intersections suivantes :

1) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [\,n\,;+\infty\,[$ 2) $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} [\,n\,;+\infty\,[$ 3) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}\,;1789-\frac{1}{n}\right]$ 4) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}\,;1789-\frac{1}{n}\right]$

Correction : Commençons par faire un dessin pour les questions 1 et 2 :



Rappelons qu'un élément est dans l'union si et seulement s'il est dans au moins un ensemble, et il est dans l'intersection si et seulement s'il est dans tous les ensembles. On voit (nous le montrerons rigoureusement) que les éléments apparaissant dans au moins un ensemble sont tous les réels positifs, et qu'il n'y a aucun réel présent dans tous les ensembles. Faisons à présent un dessin (non à l'échelle) pour les questions 3 et 4 :



De même, on voit (mais nous allons le montrer) que tous les éléments apparaissant dans au moins un ensemble sont les éléments de $]\,0\,;1789\,[$ (les bornes n'étant jamais atteintes), et que les éléments présents dans tous les ensembles sont les éléments de $[\,1\,;1788\,]$.

1) Notons cette union U_1. Montrons que $U_1 = \mathbb{R}_+$ par double inclusion.
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $x \in [\,0\,;+\infty\,[$. En particulier, x appartient à l'un des ensembles de la forme $[\,n\,;+\infty\,[$ donc appartient à leur union, c'est-à-dire que $x \in U_1$: on en déduit que $\mathbb{R}_+ \subset U_1$.
   - Réciproquement, soit $x \in U_1$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [\,n\,;+\infty\,[$. En particulier, $0 \leqslant n \leqslant x$ donc $x \in \mathbb{R}_+$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

2) Notons cette intersection I_2 et montrons que $I_2 = \varnothing$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$ et donc tel que $x \notin [\, n_0\,;+\infty\,[$. Le réel x n'appartient pas à un ensemble du type $[\, n\,;+\infty\,[$ donc il n'appartient pas à l'intersection. Le réel x étant quelconque, aucun réel n'appartient à l'intersection : celle-ci est vide.
3) Notons cette union U_3 et montrons que $U_3 =]\,0\,;1789\,[$ par double inclusion.
   - Soit $x \in]\,0\,;1789\,[$. Puisque $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors il existe n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $1/n \leqslant x$. De plus, $1789 - 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1789$ donc il existe n_2 tel que, pour tout $n \geqslant n_2$, $x \leqslant 1789 - 1/n$. Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors $1/n_3 \leqslant x \leqslant 1789 - 1/n_3$, c'est-à-dire que $x \in \left[\dfrac{1}{n_3}\,;1789 - \dfrac{1}{n_3}\right]$ donc $x \in U_3$: on a donc prouvé que $]\,0\,;1789\,[\subset U_3$.
   - Soit $x \in U_3$. Il existe $n \geqslant 1$ tel que $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;1789 - \dfrac{1}{n}\right]$. Dès lors, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1789 - \dfrac{1}{n} < 1789$: $x \in]\,0\,;1789\,[$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
4) Notons cette intersection I_4. Montrons que $I_4 = [\,1\,;1788\,]$ par double inclusion.
   - Soit $x \in [\,1\,;1788\,]$. Soit $n \geqslant 1$. Alors $\dfrac{1}{n} \leqslant 1 \leqslant x \leqslant 1788 \leqslant 1789 - \dfrac{1}{n}$: $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;1789 - \dfrac{1}{n}\right]$. Ceci étant valable pour tout n, x appartient à tous ces ensembles donc à leur intersection : $x \in I_4$, c'est-à-dire que $[\,1\,;1788\,] \subset I_4$.
   - Soit $x \in I_4$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;1789 - \dfrac{1}{n}\right]$, et c'est en particulier vrai pour $n = 1$: $x \in [\,1\,;1788\,]$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 6. ✪✪ Vrai ou faux ?

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leqslant x^2 \leqslant M$.
2) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant x^2 \leqslant M$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leqslant \sin(x) \leqslant M$.
4) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant \sin(x) \leqslant M$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \sin x = ax^2 + bx + c$.
6) $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \sin x = ax^2 + bx + c$.
7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\cos(2x) = a\cos^2 x + b\cos x + c$.
8) $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = a\cos^2 x + b\cos x + c$.

Correction :

1) **Vrai :** m et M sont définis après x donc peuvent dépendre de x. Ainsi, $m = M = x^2$ conviennent.
2) **Faux :** la différence est que m et M doivent être les mêmes pour tout x. On demande donc si la fonction carré est bornée, ce qui est faux car elle n'est pas majorée.
3) **Vrai :** là aussi on peut prendre $m = M = \sin(x)$.
4) **Vrai :** on peut prendre $m = -1$ et $M = 1$.
5) **Vrai :** $a = b = 0$ et $c = \sin x$ conviennent.
6) **Faux :** supposons que de tels a, b, c existent. Si $a \neq 0$ alors $\sin(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ selon le signe de a, ce qui est absurde, donc $a = 0$. De même $b = 0$ donc $\sin(x) = c$: absurde car la fonction $\sin$ n'est pas constante.
7) **Vrai :** $a = b = 0$ et $c = \cos(2x)$ conviennent.
8) **Vrai :** $a = 2, b = 0$ et $c = -1$ conviennent. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Chapitre 3

Différents types de raisonnements

LE COURS

Dans ce chapitre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignent des propositions.

I Raisonnements simples, basiques

1) Raisonnement « direct »

Principe du raisonnement « direct » : Si on veut prouver une implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, on suppose que $\mathcal{A}$ est vraie et on montre $\mathcal{B}$.

Exemple : *Soient $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que si r_1 et r_2 sont rationnels, alors $r_1 + r_2$ est rationnel.*

Supposons r_1 et r_2 rationnels. Il existe donc $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q_1, q_2) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tels que $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ donc $r_1 + r_2 = \dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$. Comme $p_1q_2 + p_2q_1 \in \mathbb{Z}$ et $q_1q_2 \in \mathbb{Z}^*$, on en déduit que $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$.

On reverra ces notions dans le chapitre 4.

2) Raisonnement par double implication

Principe du raisonnement par double implication : Si on veut prouver une équivalence $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, on prouve les deux implications $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

En général, c'est de cette manière qu'on prouve les équivalences car on ne peut pas toujours raisonner par équivalences, et même quand on peut, un raisonnement par double implication est aussi possible.

Remarque : On peut prouver ces deux implications par un raisonnement direct ou par un autre type de raisonnement (absurde, contraposée etc.). On se ramène donc aux autres parties de ce chapitre.

3) Raisonnement par équivalences

Principe du raisonnement par équivalences : On travaille par équivalences successives.

Exemple : *Montrons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante.*

On reverra ces notions dans le chapitre 8.

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et décroissante} &\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n \end{cases} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \\
&\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}
\end{aligned}$$

Remarque : Comme dit plus haut, même quand on peut raisonner par équivalences, un raisonnement par double implication est toujours possible : le lecteur s'en convaincra en reprenant l'exemple précédent et en raisonnant par double implication. Ce n'est qu'avec de l'expérience qu'on arrivera à repérer du premier coup d'oeil les cas où un raisonnement par équivalences (plus rapide) est possible. Dans le doute : travailler par double implication. Cependant, on rencontre parfois (rarement, il est vrai, mais alors le raisonnement par équivalences est d'une grande aide) le cas de figure suivant : on ne sait pas du tout si une affirmation est vraie. On raisonne alors par équivalences, et on se ramène à une affirmation dont on sait si elle est vraie ou non, ce qui permet de répondre quant à la véracité de la première.

Exemple : *Donnons le tableau de variations de $f : x \longmapsto \ln(x)/x$. Qui est le plus grand entre e^π et π^e ?*

On reverra ces notions dans le chapitre 11.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est un quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Par conséquent, $f'(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ (car l'exponentielle est strictement croissante). De même, $f(x) = 0 \iff x = e$ et $f(x) < 0 \iff x > e$, d'où le tableau de variations suivant :

La limite en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées, cf. chapitres 6 et 9.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

Pour la deuxième question, le moins que l'on puisse dire est qu'on n'a aucune idée du résultat. Comme dit en préambule, raisonnons par équivalences : si le résultat final est faux, alors le premier est faux, et si le résultat final est juste, alors le premier est juste. Essayons de faire apparaître la fonction f (cela justifie la troisième ligne qui, sans cette motivation, pourrait paraître parachutée).

Si on avait débuté par $e^\pi < \pi^e$, on aurait fini par $f(e) < f(\pi)$ qui est une affirmation fausse, donc l'affirmation $e^\pi < \pi^e$ est fausse : ainsi, $e^\pi \geqslant \pi^e$ et on exclurait de même le cas $e^\pi = \pi^e$. Peu importe la supposition initiale, on arrive au bon résultat !

$$\begin{aligned}
e^\pi > \pi^e \quad &\iff \quad e^{\pi\ln(e)} > e^{e\ln(\pi)} && (\textit{car } \ln(e) = 1) \\
&\iff \quad \pi\ln(e) > e\ln(\pi) && (\textit{car } \ln \textit{ strictement croissante}) \\
&\iff \quad \frac{\ln(e)}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi} && (\textit{car } e \textit{ et } \pi \textit{ sont strictement positifs}) \\
&\iff \quad f(e) > f(\pi)
\end{aligned}$$

Or, la dernière affirmation est vraie d'après la question 1 donc la première l'est aussi car on a travaillé par équivalences : $e^\pi > \pi^e$.

4) Raisonnement « existence-unicité »

On verra de nombreuses applications de ce raisonnement dans les chapitre suivants (existence et unicité de la partie entière, cf. chapitre 4, division euclidienne, cf. chapitre 16, etc.).

Principe du raisonnement « existence - unicité » : Quand on veut prouver l'existence et l'unicité d'un objet, on prouve d'abord l'existence (en général en exhibant un objet qui convient), puis l'unicité (en général en supposant qu'il existe un autre objet qui convient, puis en montrant qu'il est égal au premier).

⚠ Attention de ne pas conclure le raisonnement d'unicité ci-dessous par « Absurde ». En effet, nous n'avons pas supposé que P et Q sont distincts ! On peut parfois supposer qu'ils sont distincts et faire un raisonnement par l'absurde (voir partie suivante), mais attention à ne pas conclure à l'absurdité si rien n'a été supposé. En clair, attention de ne pas confondre un raisonnement par l'absurde avec un raisonnement absurde...

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(k) = k^n$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.*

- ***Existence.*** *Le polynôme $P = X^n$ convient. D'où l'existence.*
- ***Unicité.*** *Soit Q un polynôme qui convient. Alors P et Q coïncident en tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ donc en $n+1$ points. Or, ils sont de degré inférieur ou égal à n donc sont égaux. D'où l'unicité.*

L'exemple ci-contre utilise des résultats sur les polynômes (cf. chapitre 16). Le lecteur peut donc retenir le principe du raisonnement mais passer les arguments mathématiques en première lecture.

II Raisonnement par l'absurde

Principe du raisonnement par l'absurde : On suppose faux le résultat que l'on veut prouver, et on aboutit à une absurdité.

Si on veut prouver une implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, quand on raisonne par l'absurde, on suppose donc $\mathcal{A}$ et $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ vraie (c'est la négation de $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) et on arrive à une absurdité. Attention à ne pas supposer $\mathrm{non}(\mathcal{A})$! Ce serait une grave erreur de logique ! Pour un raisonnement par l'absurde, on suppose l'hypothèse vraie, mais pas la conclusion !

Exemples :

- *Montrons qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas est de signe constant.*

  Raisonnons par l'absurde et supposons que f change de signe. Alors il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$. Puisque f est continue, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cf. chapitre 10), il existe $x_3 \in [\, x_1\,;\, x_2\,]$ tel que $f(x_3) = 0$ ce qui est absurde car f ne s'annule pas. f est donc de signe constant.

- *Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

  Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux (i.e. 1 est le seul entier naturel diviseur de p et de q) tels que $\sqrt{2} = p/q$. Par conséquent, $2q^2 = p^2$. Donnons le dernier chiffre de p^2 (respectivement $2q^2$) en fonction de celui de p (respectivement celui de q). Par exemple, si le dernier chiffre de p est un 8 alors le dernier chiffre de p^2 est un 4.

Pour les lecteurs ayant suivi l'enseignement de maths expertes en Terminale, on parle de congruence modulo 10.

Dernier chiffre de p	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Dernier chiffre de p^2	*0*	*1*	*4*	*9*	*6*	*5*	*6*	*9*	*4*	*1*
Dernier chiffre de q	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Dernier chiffre de $2q^2$	*0*	*2*	*8*	*8*	*2*	*0*	*2*	*8*	*8*	*2*

Puisque $2q^2 = p^2$, alors ces deux nombres ont le même chiffre des unités. Or, le seul chiffre commun aux deux lignes p^2 et $2q^2$ est 0 : $2q^2$ et p^2 se terminent par 0, ce qui ne peut arriver (cf. lignes au-dessus) que si p se termine par 0 et q par 0 ou 5 : mais alors p et q sont divisibles par 5, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux : absurde, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

La définition d'un irrationnel, et même la seule chose connue à son sujet, est qu'il n'est pas rationnel (alors qu'on sait beaucoup de choses sur les rationnels, par exemple que la somme de deux rationnels est un rationnel). Cette définition étant la négation d'une propriété, les raisonnements par l'absurde sont particulièrement adaptés pour montrer qu'un nombre est irrationnel.

Remarque : Quand on fait plusieurs raisonnements par l'absurde imbriqués les uns dans les autres et qu'on arrive à une absurdité, ce qui est absurde, c'est la dernière hypothèse faite.

Exemple : *Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Montrons que $a = c$ et que $b = d$.*

Raisonnons par l'absurde et supposons que $a \neq c$ ou que $b \neq d$. Si $b \neq d$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ car c'est un quotient de rationnels, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi (dernière hypothèse faite), $b = d$. Par conséquent, $a \neq c$. Or, $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ et $b = d$ donc $a = c$ ce qui est absurde : $a = c$ et $b = d$.

III Raisonnement par contraposée

C'est-à-dire une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

Rappel du chapitre 1 : Si on a une implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, alors sa contraposée est $\text{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{A})$. De plus, une implication et sa contraposée sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

C'est parfois plus facile. Y penser si on bloque !

Principe du raisonnement par contraposée : Si on veut montrer qu'une implication est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée est vraie.

Exemple : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que, si n^2 est pair, alors n est pair.*

Il ne semble pas facile de prouver cette implication directement. Prouvons ce résultat par contraposée, c'est-à-dire que si n est impair alors n^2 est impair. Supposons donc n impair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Ainsi, $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est également impair, d'où le résultat par contraposée.

Remarque : De même, si n^2 est impair alors n est impair : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Par conséquent, n et n^2 sont de même parité, ce qu'on peut également reformuler de la manière suivante : n est pair si et seulement si n^2 est pair. Utilisons ce résultat pour prouver (encore) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Reprenons le raisonnement précédent à : $2q^2 = p^2$. Alors p^2 est pair donc, d'après ce qui précède, p est pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$, si bien que $2q^2 = p^2 = 4k^2$. Ainsi, $q^2 = 2k^2$, q^2 est pair donc q est pair, ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux donc ne peuvent être tous les deux pairs (c'est-à-dire divisibles par 2). En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

La réciproque est fausse, comme on le voit avec $x = \sqrt{2}$.

Exemple : *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel. Supposons $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = p/q$ donc $x^2 = p^2/q^2 \in \mathbb{Q}$. Par contraposée, on a le résultat voulu.*

IV Raisonnement par double inclusion

Cf. chapitre 2.

V Raisonnement par disjonction de cas

Principe du raisonnement par disjonction de cas : On prouve le résultat dans tous les cas possibles.

La notation $\sum$ sera revue dans le chapitre 5 : nous l'utiliserons parfois dans le présent chapitre, surtout quand nous ferons des récurrences.

Exemple : *On prouvera dans le VII que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour l'instant, contentons-nous de vérifier la cohérence de cette égalité, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité de droite est bien un entier. Raisonnons pour cela par disjonction de cas.

Les raisonnements par disjonction de cas sont particulièrement utiles quand on veut prouver un résultat dépendant de la parité d'un entier n.

- ***Premier cas : si** n **est pair.*** *Alors $n/2$ est un entier donc $n(n+1)/2$ est bien un entier.*
- ***Deuxième cas : si** n **est impair.*** *Alors $n + 1$ est pair donc $(n+1)/2$ est un entier, donc $n(n+1)/2$ est aussi un entier.*

En conclusion, dans tous les cas, $n(n+1)/2$ est un entier.

Ne pas faire une disjonction de cas lorsqu'il n'y a pas de raison d'en faire. On n'en fait une que lorsqu'on veut appliquer un résultat du cours qui nécessite de distinguer des cas (comme la parité dans l'exemple précédent).

VI Raisonnement par analyse-synthèse

Principe du raisonnement par analyse-synthèse : Le raisonnement par analyse-synthèse est utile dans les cas où un raisonnement par équivalences est impossible ou tout simplement difficile.

- Dans une première partie (l'analyse), on suppose l'existence d'une solution, et on en déduit des propriétés, ce qui permet de réduire les possibilités. En clair, pendant l'analyse, on donne les seules solutions **éventuelles**.
- Dans une deuxième partie (la synthèse), on se demande, parmi les solutions **éventuelles** trouvées lors de l'analyse, lesquelles sont **effectivement** solutions du problème initial.

Dans le premier exemple ci-contre, on pourrait travailler par équivalences en prenant certaines précautions, mais une erreur de logique n'est jamais loin : le raisonnement par analyse-synthèse permet de travailler l'esprit tranquille.

Exemple : *Résolvons l'équation $x = \sqrt{x^3 + x^2 - x}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.*

- ***Analyse :*** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x convient alors, en mettant au carré, $x^2 = x^3 + x^2 - x$ donc $x^3 - x = 0$. En factorisant par x, il vient $x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1) = 0$ donc $x = 0, x = 1$ ou $x = -1$.*
- ***Synthèse :*** *0 et 1 sont solutions mais -1 ne l'est pas.*

En conclusion, les solutions de l'équation sont 0 et 1.

Ne pas oublier la synthèse ! D'une part, si on l'oublie, il y a une faille logique dans le raisonnement : on a un raisonnement du type « si ça marche, alors ça marche. » D'autre part, on voit ci-contre que les solutions éventuelles trouvées lors de l'analyse ne sont pas toutes solutions : on risque donc de donner des solutions qui n'en sont pas !

Cas particulier important : Quand on veut prouver l'existence et l'unicité d'un objet. Lors de l'analyse, on trouve l'unique solution **éventuelle** du problème, et lors de la synthèse, on vérifie que cet objet convient effectivement.

Exemple : *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire uniques telles que $f = p + i$.*

- ***Analyse :*** *Supposons que p et i conviennent. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $f(x) = p(x) + i(x)$. D'autre part, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$ car p est paire et i est impaire. Par somme et par différence,*

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- ***Synthèse :*** *Soient p et i les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$p : x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i : x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

  Montrons que

  1. p est paire. 2. i est impaire. 3. $f = p + i$.

  Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x)$ c'est-à-dire que p est paire. De même, i est impaire. Enfin, $p(x) + i(x) = \dfrac{f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$. D'où l'existence et l'unicité.

On reverra les fonctions paires et impaires dans le chapitre 6.

VII Raisonnement par récurrence

Cadre : On note H_n une propriété ou hypothèse qui dépend de n, et on cherche à montrer que H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (où n_0 est un entier donné). On peut bien sûr parfois montrer cela directement (par exemple si H_n est : « n et n^2 ont la même parité ») mais parfois il est plus simple de montrer cela « de proche en proche ».

On rappelle que pour montrer un résultat qui commence par « $\forall n \geqslant n_0$ », on commence par écrire « Soit $n \geqslant n_0$ ». Écrire « supposons que pour tout $n \geqslant n_0, H_n$ soit vraie » est une erreur grave, voir ci-dessous.

1) Récurrence simple

Théorème (principe de récurrence – admis). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

- *H_{n_0} est vraie : c'est « l'initialisation ».*
- *Pour tout $n \geqslant n_0$, si H_n est vraie, alors H_{n+1} est vraie : c'est « l'hérédité ».*

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque : On parle du « principe » de récurrence, mais on peut le prouver !

Rédaction d'un raisonnement par récurrence : Un raisonnement par récurrence comporte quatre étapes :

1. énoncer l'hypothèse.
2. l'initialisation.
3. l'hérédité.
4. la conclusion.

On peut voir un raisonnement par récurrence comme une suite infinie de dominos qui tombent : l'initialisation, c'est le premier domino qui tombe, et l'hérédité, c'est chaque domino qui entraîne son successeur dans sa chute. Si les deux conditions sont vérifiées, alors tous les dominos tombent.

Exemple : *Si $n \geqslant 1$, notons $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.*
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- *Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».*
- *D'une part, $S_1 = 1$, et d'autre part, $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1 = S_1$ donc H_1 est vraie.*
- *Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.*

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- *D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.*

Réflexe : se ramener au rang précédent pour utiliser l'hypothèse de récurrence.

Remarque : Plusieurs erreurs à ne surtout pas faire :

- ⚠ Il ne faut pas écrire H_n : « $\forall n \geqslant n_0, \dots$ », c'est-à-dire écrire « $\forall n$ » **dans** H_n : cela n'a aucun sens ! Il suffit de remplacer n par une valeur explicite pour s'en convaincre : si on écrit H_n : « $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ », alors H_{1789} est l'hypothèse « $\forall 1789 \geqslant 1, \dots$ », qui n'a aucun sens. Cependant, on peut écrire (presque) tout ce qu'on veut à part ça, par exemple, H_n : « $\forall x > 0,\ f_n(x) = \dots$ ».
- ⚠ Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons que, pour tout $n \geqslant n_0$, H_n soit vraie ». Dans ce cas, c'est fini ! On suppose ce qu'on veut prouver !
- ⚠ Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que H_n soit vraie ». En effet, le n choisi n'est pas alors quelconque alors qu'il faut prouver l'hérédité pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0 : il peut y avoir des trous dans le raisonnement par récurrence !

L'étape d'hérédité commence toujours ainsi : « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons H_n est vraie (et montrons que H_{n+1} est vraie) ».

- ⚠ Dans l'hérédité, on doit prendre n supérieur ou égal à la dernière valeur pour laquelle on a montré l'initialisation. Dans l'exemple ci-dessus, on a prouvé H_1 donc on suppose $n \geqslant 1$, il ne faut pas supposer $n \geqslant 2$! Si cela ne suffit pas, prouver l'initialisation pour une valeur supplémentaire, cf. exercice 2.
- ⚠ Dans l'initialisation, il ne faut pas écrire « $S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ donc H_1 est vraie » !

  En effet, on ne sait pas encore que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$! C'est ce qu'on veut prouver ! Comme ci-dessus, il faut calculer les deux termes séparément et prouver qu'ils sont égaux.

Exemple : *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 2$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2$ si n est pair et $x_n = 1/2$ si n est impair.

- *Plutôt que de donner une hypothèse qui dépendrait de la parité de n (ce qui serait possible mais compliquerait les raisonnements), posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, H_p : « $x_{2p} = 2$ et $x_{2p+1} = 1/2$ ».*
- *$x_0 = 2$ et $x_1 = 1/2$ donc H_0 est vraie.*
- *Soit $p \geqslant 0$. Supposons H_p vraie et prouvons que H_{p+1} est vraie. On a $x_{2p+2} = 1/x_{2p+1}$. Or, $x_{2p+1} = 1/2$ par hypothèse de récurrence donc $x_{2p+2} = 2$. De plus,*
  $x_{2p+3} = 1/x_{2p+2} = 1/2$ d'après ce qui précède. Par conséquent, H_{p+1} est vraie.
- *D'après le principe de récurrence, H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.*

⚠ Raisonnement classique quand on veut montrer un résultat qui dépend de la parité de n.

H_{p+1} est : « $x_{2p+2} = 2$ et $x_{2p+3} = 1/2$ ».

Remarque : Dans ce livre, nous écrirons souvent : « par une récurrence immédiate ». Le candidat a aussi le droit de dire cela dans une copie, à deux conditions :

- Avoir déjà rédigé une récurrence dans sa copie (il ne faut donc pas parler de récurrence immédiate pour la première récurrence du sujet). En effet, le correcteur veut voir si le candidat sait rédiger. Une fois qu'il a montré patte blanche, il peut aller plus vite sur les suivantes.
- Que la récurrence soit vraiment immédiate (les correcteurs sont chatouilleux à propos des tentatives d'arnaque). Montrer que le résultat est vrai aux rangs $0, 1, 2, 3$ etc. en faisant apparaître l'argument qui permet de passer du rang 1 au rang 2 (par exemple), en faisant bien comprendre qu'il se généralise, suffit en général à convaincre le correcteur.

Exemple : *Reprenons la suite ci-dessus. Tout d'abord, $x_0 = 2 > 0$ donc $x_1 = 1/x_0 > 0$. Par conséquent, $x_2 = 1/x_1 > 0$, d'où, encore une fois, $x_3 = 1/x_2 > 0$. Par une récurrence immédiate, $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

De façon générale, nous conseillons au lecteur de rédiger une récurrence s'il n'est pas sûr de lui : d'une part, cela lui évitera de se tromper en affirmant un résultat faux (si on ne prouve rien, on risque de se tromper), et d'autre part, si lui-même n'est pas convaincu, comment peut-il espérer convaincre le correcteur ? Si la récurrence est vraiment immédiate, la rédiger prendra moins de cinq minutes (ce qui est peu sur une épreuve de quatre heures), et le candidat sera tranquille.

2) Récurrence forte

Parfois, pour démontrer que H_{n+1} est vraie, supposer H_n vraie ne suffit pas, il faut supposer également que $H_{n-1}, H_{n-2}, \ldots$ sont vraies. On dit qu'on effectue une récurrence forte ou avec prédécesseurs.

Théorème (principe de récurrence forte). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

- *H_{n_0} est vraie.*
- *Pour tout $n \geqslant n_0$, si $H_{n_0}, \ldots, H_n$ sont vraies, alors H_{n+1} est vraie.*

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

On ne suppose plus uniquement le résultat vrai au rang précédent, mais à **tous** les rangs précédents.

Exemple : *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ *et*

$$\forall n \geqslant 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x_0x_n + x_1x_{n-1} + \cdots + x_nx_0\right)$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$.

- *Si* $n \geqslant 0$, *notons* H_n *: «* $x_n \geqslant 0$ *».*
- H_0 *et* H_1 *sont vraies par hypothèse.*
- *Soit* $n \geqslant 1$. *Supposons* $H_0, \dots, H_n$ *vraies et prouvons que* H_{n+1} *est vraie. Par hypothèse de récurrence,* $x_0 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$. *En d'autres termes,* x_{n+1} *est produit et somme de termes positifs ou nuls donc* $x_{n+1} \geqslant 0$ *:* H_{n+1} *est vraie.*
- *D'après le principe de récurrence,* H_n *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

En effet, supposer H_n vraie, i.e. $x_n \geqslant 0$, ne suffit pas pour prouver que x_{n+1} est positif : il faut également supposer que tous les autres termes le sont !

Remarque : Parfois, il est difficile de savoir à l'avance quand effectuer une récurrence forte. Dans ce cas, commencer comme une récurrence normale et, quand on a besoin d'une hypothèse plus forte, revenir sur ses pas et modifier ce qu'on a écrit.

Exemple : *Si* $n \geqslant 1$, *posons* $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

H_n est appelé le n-ième nombre harmonique.

Montrons que pour tout $n \geqslant 2, H_n \notin \mathbb{N}$. *On a* $H_2 = 3/2, H_3 = 11/6$ *et* $H_4 = 25/12$. *On va en fait montrer un résultat plus fort.*

Attention, la notation H_n est déjà prise !

- *Si* $n \geqslant 2$, *notons* P_n *: « il existe* i_n *impair et* p_n *pair tels que* $H_n = i_n/p_n$. *»*
- P_2, P_3, P_4 *sont vraies.*
- *Soit* $n \geqslant 4$. ~~*Supposons* P_n *vraie*~~ ***Supposons*** $P_2, \dots P_n$ ***vraies*** *et prouvons que* P_{n+1} *est vraie.*
  — *Supposons* n *pair. Alors* $n+1$ *est impair. De plus,* $H_{n+1} = H_n + \dfrac{1}{n+1}$. *Par hypothèse de récurrence, il existe* i_n *impair et* p_n *pair tels que* $H_n = i_n/p_n$, *si bien que*
  $$H_{n+1} = \frac{i_n \times (n+1) + p_n}{p_n \times (n+1)}$$
  Posons $i_{n+1} = i_n \times (n+1) + p_n$ *et* $p_{n+1} = p_n \times (n+1)$. *Alors* i_{n+1} *est impair et* p_{n+1} *est pair (car* i_n *et* $n+1$ *sont impairs et* p_n *pair) et* $H_{n+1} = i_{n+1}/p_{n+1}$, *ce qui est le résultat voulu. Le problème est que cela ne marche plus si* n *est impair (voir ci-dessous).*
  — *Supposons* n *impair. Le résultat précédent n'est plus valable car* $i_n \times (n+1) + p_n$ *est pair. Il faut raisonner autrement. Comme* $n+1$ *est pair, il existe* $q \geqslant 2$ *(car* $n+1 \geqslant 5 \geqslant 4$*) tel que* $n+1 = 2q$. *Par conséquent,*
  $$\begin{aligned} H_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{\text{termes impairs}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right)}_{\text{termes pairs}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q}\right)}_{=H_q} \end{aligned}$$

On débute comme une récurrence normale, et on se rend compte plus tard que ça ne suffit pas, donc on barre et on corrige. On précisera dans la suite où et comment on se rend compte qu'il faut une récurrence forte. Nous conseillons au lecteur de jouer le jeu, de la rédiger comme une récurrence normale et de corriger lorsqu'il se rend compte que ça ne suffit pas.

Par hypothèse de récurrence, P_q est vraie : il existe i_q impair et p_q pair tels que $H_q = i_q/p_q$, si bien que

$$H_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{i_q}{p_q}$$

En mettant tout sur le même dénominateur (sans chercher à être subtil : $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times n$, qui est bien impair, convient), il existe $C \in \mathbb{N}$ quelconque et $D \in \mathbb{N}$ impair tel que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{C}{D}$$

si bien que $H_{n+1} = \dfrac{C}{D} + \dfrac{i_q}{2p_q} = \dfrac{2Cp_q + i_q \times D}{2Dp_q}$, ce qui est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair, ce qui est encore le résultat voulu.

Dans tous les cas, P_{n+1} est vraie.

- *D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.*

On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence à H_q : problème, si on fait une récurrence classique, le résultat n'est pas vrai au rang q car on ne l'a supposé vrai qu'au rang n. C'est ici qu'on se rend compte qu'on fait une récurrence forte (bien sûr, à l'écrit, on ne met que la récurrence forte, inutile de mettre la récurrence classique et d'expliquer pourquoi on a changé d'avis...) : on remonte et on change le début de l'hérédité.

3) Un cas intermédiaire : la récurrence double

Théorème (principe de récurrence double). *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

- *H_{n_0} et H_{n_0+1} sont vraies.*
- *Pour tout $n \geqslant n_0$, si H_n et H_{n+1} sont vraies, alors H_{n+2} vraie.*

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Ici, on suppose l'hypothèse aux deux derniers rangs. Attention, il faut montrer l'initialisation pour deux valeurs ! On généralise sans peine à une récurrence triple ou à une récurrence d'ordre k pour $k \geqslant 3$. Attention, il ne faut pas oublier de montrer l'initialisation pour k valeurs !

Exemple : *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant 0$.

- *Si $n \geqslant 0$, notons H_n : « $F_n \geqslant 0$ ».*
- *H_0 et H_1 sont vraies par hypothèse.*
- *Soit $n \geqslant 0$. Supposons H_n et H_{n+1} vraies, et montrons que H_{n+2} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $F_n \geqslant 0$ et $F_{n+1} \geqslant 0$ donc $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geqslant 0$: H_{n+2} est vraie.*
- *D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a supposé $n \geqslant 0$. Or, on a montré que H_1 est vraie : pourquoi ne pas supposer $n \geqslant 1$? Car on suppose H_{n+1} vraie. Or, le dernier indice pour lequel on suppose le résultat vrai (ici, $n+1$) doit être supérieur ou égal au dernier rang pour lequel on a montré l'initialisation (ici, 1). On doit donc avoir $n+1 \geqslant 1$ donc $n \geqslant 0$: tout va bien.

Attention, comme dit plus haut, il faut impérativement montrer l'initialisation pour deux valeurs, sinon il y a une faille logique dans le raisonnement. Par exemple, si on définit la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la suite de Gibonacci ?) par $G_0 = 0$, $G_1 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$$

Alors $G_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on suppose $G_n \geqslant 0$ et $G_{n+1} \geqslant 0$, alors $G_{n+2} \geqslant 0$. Un lecteur peu attentif pourrait en déduire que $G_n \geqslant 0$ pour tout n... ce qui serait complètement faux car $G_n < 0$ pour tout $n \geqslant 1$!