

L'intégrale



Mathématiques approfondies Informatique

▶ **QUESTIONS ET MÉTHODES**

Coordonné par O. SARFATI et M. ALFRÉ

DUNOD

Couverture :

- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082627-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation »**. Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté.
- **Annotez également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 4 à 5 fois sur vos deux années de prépas.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de vos deux années de prépa, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Sommaire

Partie I. Généralités

Chapitre 1. Récurrence, logique, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
1.2. Récurrence	25
1.3. Ensembles	29
1.4. Parties de \mathbb{R}	33
1.5. Applications	36
1.6. Exercices corrigés	47
1.7. Corrigés des exercices	49
Chapitre 2. Sommes et Produits	57
2.1. Sommes	59
2.2. Produits	83
2.3. Exercices corrigés	87
2.4. Corrigés des exercices	89

Partie II. Algèbre

Chapitre 3. Polynômes	101
3.1. Degré et coefficient d'un polynôme	103
3.2. Dérivation d'un polynôme	113
3.3. Racines et factorisation d'un polynôme	116
3.4. Reste dans la division euclidienne	124
3.5. Égalités de polynômes	126
3.6. Exercices corrigés	130
3.7. Corrigés des exercices	132
Chapitre 4. Systèmes linéaires et Matrices	145
4.1. Systèmes linéaires	147
4.2. Calculs matriciels	155
4.3. Propriétés d'une matrice	172
4.4. Exercices corrigés	187
4.5. Corrigés des exercices	192
Chapitre 5. Généralités sur les espaces vectoriels	215
5.1. Sous-espaces vectoriels	217
5.2. Familles libres, génératrices et bases	220
5.3. Exercices corrigés	230
5.4. Corrigés des exercices	231
Chapitre 6. Compléments sur les espaces vectoriels	241
6.1. Espaces vectoriels de dimension finie	243
6.2. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice	250
6.3. Familles libres, génératrices et bases	255
6.4. Égalités d'espaces vectoriels	259
6.5. Sommes de sous-espaces vectoriels	259
6.6. Exercices corrigés	274
6.7. Corrigés des exercices	276

Chapitre 7. Applications linéaires.	285
7.1. Applications linéaires	287
7.2. Noyau, Image et Rang	290
7.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité	296
7.4. Matrice représentative d'une application linéaire	308
7.5. Projecteurs	316
7.6. Polynômes d'endomorphismes	324
7.7. Exercices corrigés	331
7.8. Corrigés des exercices	333

Partie III. Analyse

Chapitre 8. Suites.	353
8.1. Existence et calcul du terme général d'une suite	355
8.2. Monotonie d'une suite	363
8.3. Encadrement d'une suite	366
8.4. Comportement en l'infini	371
8.5. Étude des suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$	385
8.6. Exercices corrigés	387
8.7. Corrigés des exercices	389

Chapitre 9. Fonctions. Limites, continuité, dérivabilité	401
9.1. Ensemble de définition	403
9.2. Limite	405
9.3. ★ Négligeabilité, équivalence	412
9.4. Continuité	419
9.5. Dérivation	424
9.6. Dérivées successives	435
9.7. Exercices corrigés	441
9.8. Corrigés des exercices	443

Chapitre 10. Fonctions. Étude générale	455
10.1. Parité et périodicité	457
10.2. Sens de variation	459
10.3. Bijection	464
10.4. ★ Convexité et concavité	471
10.5. Encadrements et inégalités	474
10.6. Résolution d'équations	488
10.7. Représentation graphique	493
10.8. Exercices corrigés	498
10.9. Corrigés des exercices	500

Chapitre 11. Intégration sur un segment.	513
11.1. Calcul et expression d'une intégrale	515
11.2. Encadrement d'une intégrale	534
11.3. Lien entre sommes et intégrales	539
11.4. Fonction définie par une intégrale	542
11.5. Suite définie par une intégrale	550
11.6. Exercices corrigés	554
11.7. Corrigés des exercices	557

Chapitre 12. Séries numériques	571
12.1. Convergence et divergence d'une série	573
12.2. Encadrement de la somme d'une série	591
12.3. Fonction définie comme somme d'une série	598
12.4. Exercices corrigés	602
12.5. Corrigés des exercices	605

Chapitre 13. Formules de Taylor, développements limités	617
13.1. Formules de Taylor	619
13.2. Développements limités	626
13.3. Exercices corrigés	635
13.4. Corrigés des exercices	638
Chapitre 14. Intégrales impropres	657
14.1. Convergence et divergence d'une intégrale impropre	659
14.2. Encadrement d'une intégrale impropre	683
14.3. Fonctions définies par une intégrale impropre	689
14.4. Suites d'intégrales impropres	695
14.5. Exercices corrigés	700
14.6. Corrigés des exercices	703

Partie IV. Probabilités

Chapitre 15. Probabilités sur un univers fini ou infini	721
15.1. Les bases du dénombrement	723
15.2. Espaces probabilisés	732
15.3. Probabilité d'événements	741
15.4. Événements indépendants	766
15.5. Exercices corrigés	771
15.6. Corrigés des exercices	774
Chapitre 16. Variables aléatoires discrètes	793
16.1. Notion de variable aléatoire discrète	795
16.2. Loi d'une variable aléatoire discrète	799
16.3. Espérance d'une variable aléatoire discrète X	816
16.4. Variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète	831
16.5. Rappels de cours sur les lois usuelles	843
16.6. Exercices corrigés	843
16.7. Corrigés des exercices	848
Chapitre 17. Couples de variables aléatoires réelles discrètes	869
17.1. Loi de couple de variables aléatoires	871
17.2. Indépendance variables aléatoires	878
17.3. Fonction d'un couple de variables aléatoires	884
17.4. Espérance de $g(X, Y)$	892
17.5. Exercices corrigés	896
17.6. Corrigés des exercices	898
Chapitre 18. Convergences et approximations	911
18.1. Inégalités probabilistes	913
18.2. Loi faible des grands nombres	915
18.3. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson	917
18.4. Exercices corrigés	918
18.5. Corrigés des exercices	920

Partie V. Informatique

Chapitre 19. Python	927
19.1. Notions fondamentales	929
19.2. Algèbre	935
19.3. Analyse	940
19.4. Probabilités	950
19.5. Statistiques	958

Partie I

Généralités

Chapitre 1

Récurrance, Logique, Ensembles, Applications



On commence par un chapitre très structurant pour vos deux années. Les démonstrations par récurrence seront notamment présentes dans bien des chapitres (suites, séries, probabilités, variables aléatoires, matrices...) tandis que les démonstrations par l'absurde ou les raisonnements par équivalences vous suivront à peu près partout ! Les notions d'applications injectives, surjectives ou bijectives interviendront quelque peu en analyse mais mobiliseront surtout votre attention sur les chapitres d'algèbre linéaire. Vous l'aurez compris, il ne faut pas négliger ce chapitre introductif alors n'hésitez pas à vous y plonger et à y revenir régulièrement.

DANS CE CHAPITRE

17 questions classiques

35 méthodes

42 exercices

Sommaire

Chapitre 1. Récurrence, logique, ensembles, applications	11
1.1. Logique	13
Question 1. Comment déterminer le contraire d'une proposition ?	13
Question 2. Comment montrer qu'une proposition est vraie ?	14
Question 3. Comment montrer qu'une proposition est fausse ?	20
Question 4. Comment montrer une implication directe ($H \Rightarrow P$) ?	22
Question 5. Comment montrer une équivalence ($H \Leftrightarrow P$) ?	23
1.2. Récurrence	25
Question 6. Comment prouver une proposition par récurrence ?	25
1.3. Ensembles	29
Question 7. Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?	29
Question 8. Comment montrer une égalité d'ensembles ?	31
1.4. Parties de \mathbb{R}	33
Question 9. Comment montrer qu'une partie de \mathbb{R} est majorée, minorée, bornée ?	33
Question 10. Comment montrer qu'une partie de \mathbb{R} admet un minimum, un maximum ?	34
1.5. Applications	36
Question 11. Comment déterminer l'image directe d'un ensemble A par f ?	37
Question 12. Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble B par une application f ?	38
Question 13. Comment montrer qu'une application f est injective ?	39
Question 14. Comment montrer qu'une application f est surjective ?	41
Question 15. Comment montrer qu'une application f n'est pas surjective ?	42
Question 16. Comment montrer qu'une application f est bijective ?	43
Question 17. Comment montrer qu'une application f n'est pas bijective ?	46
1.6. Exercices corrigés	47
Exercice 38. Des récurrences délicates	47
Exercice 39. Logique et quantificateurs	47
Exercice 40. Fonction caractéristique	47
Exercice 41. Irrationalité de racine de 2	48
Exercice 42. Résolution d'une équation fonctionnelle	48
1.7. Corrigés des exercices	48
Corrigé exercice 38. Des récurrences délicates	48
Corrigé exercice 39. Logique et quantificateurs	52
Corrigé exercice 40. Fonction caractéristique	53
Corrigé exercice 41. Irrationalité de racine de 2	54
Corrigé exercice 42. Résolution d'une équation fonctionnelle	56

1.1. Logique

Question 1 Comment déterminer le contraire d'une proposition ?

Méthode 1 En écrivant le contraire de chaque élément de la proposition



RAPPEL DE COURS

Soit A un ensemble, P et Q des propositions.
On note \overline{P} (ou non P) le contraire de P .
On rappelle que \forall se lit « pour tout » et \exists se lit « il existe ».

- Le contraire de « $a \geq b$ » est « $a < b$ ».
- Le contraire de « $\forall x \in A, P_x$ » est « $\exists x \in A, \overline{P_x}$ ».
Par exemple : le contraire de « $\forall x \geq 1, f(x) < 1$ » est :

$$\text{« } \exists x \geq 1, f(x) \geq 1 \text{ »}$$

- Le contraire de « $(\exists x \in A, P)$ » est « $(\forall x \in A, \overline{P})$ ».
- Le contraire de « P et Q » est « \overline{P} ou \overline{Q} ».
- Le contraire de « P ou Q » est « \overline{P} et \overline{Q} ».



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer le contraire d'une proposition, on procède en respectant les règles sur les contraires ci-dessus, en écrivant le contraire de chaque composant de la proposition. On commence par l'élément de gauche, puis on écrit le contraire des différents éléments jusqu'au dernier élément de droite. Le brouillon de l'exercice ci-dessous permet de mieux comprendre la méthode à appliquer.

Exercice 1

Écrire le contraire de :

$$\text{« } \forall x > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \leq x \right) \text{ »}$$

Corrigé



Brouillon

- Le contraire de « $\forall x > 0, P_x$ » est :
« $\exists x > 0, \overline{P_x}$ »
- Le contraire de « $\exists N \in \mathbb{N}, P_N$ » est
« $\forall N \in \mathbb{N}, \overline{P_N}$ »

- Le contraire de « $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ » est
« $\exists n \in \mathbb{N}, \overline{P_n}$ »
- Le contraire de « $(n \geq N) \Rightarrow (\frac{1}{n} \leq x)$ »
est :
« $\exists n \geq N$ tel que : $\frac{1}{n} > x$ »

Le contraire de la proposition est :

$$\exists x > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } (n \geq N) \text{ et } \left(\frac{1}{n} > x\right)$$

Question 2

Comment montrer qu'une proposition est vraie ?

Méthode 2

Pour un \forall , en montrant que pour un x quelconque vérifiant les conditions, la proposition est vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\forall x \in A, \dots$ » signifie que quel que soit x pris dans A , la proposition qui suit est vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, on prend donc un x quelconque dans A (on commence le raisonnement par « soit $x \in A$ »), puis on va chercher à montrer la proposition qui suit.

Exercice 2

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$.

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$$

Donc :

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 2x \geq -1$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq -1$

Méthode 3

Pour un \exists , en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\exists x \in A, \dots$ » signifie qu'on peut trouver x dans A tel que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, il faut donc trouver un x tel que la proposition soit vérifiée (un raisonnement comme cela peut se terminer par exemple par « Donc pour $x = \dots$, on a bien... »)

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 5x + 2 \end{cases}$
Montrer que $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2$

Corrigé

Pour $x = 0$:

$$f(x) = f(0) = 2$$

Donc : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 2}$

Méthode 4

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un \forall et un \exists



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Souvent, la proposition à prouver contiendra à la fois \forall et \exists . Il faudra donc combiner les méthodes 1 et 2 vues ci-dessus pour pouvoir montrer que la proposition est vraie.

Exercice 4

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x + 1$.

On a $x + 1 \geq x$ donc $y \geq x$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y}$

Méthode 5

Si la phrase est écrite en français et non en langage mathématique, en traduisant l'expression en termes quantifiés puis en utilisant les méthodes précédentes



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition à montrer est du type « Montrer que... » avec des termes en français et non des termes quantifiés, il faut d'abord traduire la phrase en termes quantifiés pour pouvoir ensuite utiliser les méthodes 1,2 et 3 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est vraie.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} décroissantes sur \mathbb{R} et $h = f \circ g$. Montrer que h est croissante sur \mathbb{R} .

Corrigé

Montrons que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $x \leq y$. Comme g est décroissante sur \mathbb{R} , on a alors :

$$g(x) \geq g(y)$$

et alors, comme f est décroissante sur \mathbb{R} :

$$f(g(x)) \leq f(g(y))$$

d'où :

$$h(x) \leq h(y)$$

Donc : h est croissante sur \mathbb{R}

Méthode 6

Par l'absurde



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut raisonner par l'absurde : on suppose que le contraire de la proposition est vrai, puis on poursuit le raisonnement jusqu'à aboutir à une contradiction. Notre supposition étant fautive, le contraire de la proposition est donc faux, et donc la proposition est vraie.

Les raisonnements par l'absurde sont très utiles, notamment dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Exercice 6

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Corrigé

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ tel que : $\frac{x+1}{x+2} = 1$.

On a alors :

$$x + 1 = x + 2$$

donc $1 = 2$, ce qui est absurde. On a une contradiction, donc la supposition est fausse.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \frac{x+1}{x+2} \neq 1$

Méthode 7

Pour un $\exists!$ (ou un \exists), par analyse synthèse



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\exists!x \in A, \dots$ » se lit « il existe un unique x appartenant à A tel que... » et signifie qu'on peut trouver un et un seul x dans A telle que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer cela, on peut procéder par analyse synthèse, c'est un raisonnement en deux étapes :

- **Étape 1 :** L'analyse (pour montrer l'unicité sous réserve d'existence).

On suppose l'existence et on va, par une série de déductions, trouver une liste de candidats solutions x_1, \dots, x_n (que l'on va expliciter) qui peuvent vérifier les conditions.

- **Étape 2 :** La synthèse (pour montrer l'existence). Pour chacun des candidats solution trouvés dans l'analyse, on regarde s'il vérifie bien les conditions. En cas d'unicité, ou bien il y aura un unique candidat solution, qui vérifie bien les conditions, ou bien il y aura plusieurs candidats mais un seul vérifiera les conditions.

Exercice 7

Notons F l'ensemble des fonctions définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , P l'ensemble des fonctions paires définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et I l'ensemble des fonctions impaires définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Montrer que :

$$\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i$$



RAPPEL DE COURS

- Pour A et B deux ensembles, $(x, y) \in A \times B$ signifie que $x \in A$ et $y \in B$
- $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x)$
- $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, i(-x) = -i(x)$

Corrigé

Soit $f \in F$, montrons que $\exists!(p, i) \in P \times I$, $f = p + i$.
Procédons par analyse-synthèse.

◇ *Analyse*

Supposons qu'il existe $(p, i) \in P \times I$ tels que $f = p + i$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme p est paire et i est impaire, on a :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

En faisant la somme de ces égalités d'une part, la différence d'autre part, on obtient :

$$\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2p(x) \\ f(x) - f(-x) = 2i(x) \end{cases}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

◇ *Synthèse*

Soit p et i les fonctions définies par, pour tout x dans \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

et :

$$\begin{cases} p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \\ i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} p(-x) = p(x) \\ i(-x) = -i(x) \end{cases}$$

Donc p est paire et i est impaire. Donc p et i conviennent.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall f \in F, \exists!(p, i) \in P \times I, f = p + i}$$

Méthode 8

Pour un $\exists!$, en raisonnant par équivalence



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer un $\exists!$ lorsqu'il s'agit d'une équation, et qu'on cherche donc à prouver que cette équation admet une unique solution, on peut partir de l'équation et raisonner par équivalences successives jusqu'à arriver à une unique solution.

Attention, l'utilisation des équivalents est source de nombreuses erreurs : si vous procédez par équivalences successives, assurez-vous que le sens direct et le sens réciproque sont vérifiés pour chaque équivalence. Trop souvent, les étudiants écrivent une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication.

Exercice 8

Montrer que : $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1$ et $3x - 2y = 1$.

Corrigé

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y = 1 \text{ et } 3x - 2y = 1}$

Méthode 9

Pour montrer qu'une équation du type $f(x) = a$ admet une unique solution, en utilisant le théorème de la bijection



RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction de I (I étant un intervalle de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} . Si f est continue et strictement monotone sur I , alors f établit une bijection de I dans $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert), et on a $\forall a \in f(I), \exists!x \in I, f(x) = a$.



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition est de la forme $\exists! x \in I, f(x) = a$ où $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on peut parfois montrer cette proposition en utilisant le théorème de la bijection. Il faut alors montrer que f est continue et strictement monotone sur I , et que $a \in f(I)$. Attention à ne pas vous tromper pour déterminer $f(I)$: Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, a]$, alors :

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$$

Exercice 9

Soit $n \geq 2$, montrer que : $\exists! x \in]1, +\infty[, x^n - x - 1 = 0$

Corrigé

$$\text{Posons } f : \begin{cases}]1, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - 1 \end{cases}.$$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction polynôme et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, f'(x) &= nx^{n-1} - 1 \\ &\geq n - 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

f est donc strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$. De plus on a :

$$f(1) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f établit une bijection de $]1, +\infty[$ dans $] -1, +\infty[$. Or 0 appartient à $] -1, +\infty[$, donc :

$$\exists! x \in]1, +\infty[, f(x) = 0$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{\exists! x \in]1, +\infty[, x^n - x - 1 = 0}$$

Question 3

Comment montrer qu'une proposition est fautive ?

Méthode 10

S'il s'agit d'un \forall , en trouvant un contre-exemple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition commençant par « $\forall x \in A$ » est fautive, il suffit de trouver un contre-exemple (un seul suffit, il ne faut pas raisonner dans le cas général), i.e. trouver un x dans A telle que la proposition ne soit pas vérifiée.

Exercice 10

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow \sin(x) \leq \sin(y)$$

Corrigé

Pour $x = 0$ et $y = \frac{3\pi}{2}$, on a $x \leq y$. Et pourtant on a :

$$\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(y) = -1$$

donc :

$$\sin(x) > \sin(y)$$

Donc : La proposition est fausse

Méthode 11

S'il s'agit d'un \exists , en montrant que quel que soit le x choisi vérifiant les conditions, la proposition n'est pas vérifiée



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition du type " $\exists x \in A, P$ " est fausse, il faut montrer que " $\forall x \in A, \bar{P}$ ". En effet, si quel que soit x dans A , P n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas trouver de x dans A tel que P soit vérifiée.

Exercice 11

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = -2$$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geq 0$ donc $x^2 - 1 \geq -1$ et donc :

$$x^2 - 1 > -2$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq -2$$

Donc : La proposition est fausse

Question 4

Comment montrer une implication directe ($H \Rightarrow P$) ?

Méthode 12

En supposant H vraie, et en montrant P vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que ($H \Rightarrow P$), on commence la rédaction par « supposons H », et on cherche à montrer que P est vraie.

Exercice 12

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y$.

Corrigé

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $e^x = e^y$. e^x et e^y sont strictement positifs donc en composant par \ln définie sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\ln(e^x) = \ln(e^y)$$

Or on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \ln(e^u) = u$$

Donc : $x = y$

Ainsi : $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^x = e^y \Rightarrow x = y}$

Méthode 13

Par contraposée



RAPPEL DE COURS

- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une implication est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie. On va donc montrer que le contraire de Q implique le contraire de P .

Exercice 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer :

$$(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$$

Corrigé

Montrons la contraposée : $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$.

Supposons $a > b$. On a : $a - b > 0$.

Posons $\varepsilon = a - b$. On a alors $\varepsilon > 0$. On a bien $a \geq b + \varepsilon$ car $b + \varepsilon = b + a - b = a$.

Donc $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, a \geq b + \varepsilon)$

Ainsi, par contraposée : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leq b)$

Question 5 **Comment montrer une équivalence ($H \Leftrightarrow P$) ?**



RAPPEL DE COURS

Vocabulaire On dit que P est une **condition nécessaire** pour H si et seulement si $H \Rightarrow P$

On dit que P est une **condition suffisante** pour H si et seulement si $P \Rightarrow H$

On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour H si et seulement si $H \Leftrightarrow P$

Méthode 14 **En raisonnant par équivalences successives**



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence ($H \Leftrightarrow P$), on peut raisonner par équivalences successives, en partant de H jusqu'à arriver à P (ou dans l'autre sens). On a un raisonnement de la forme suivante : $H \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P$

Attention, ce raisonnement peut être source d'erreurs car de nombreux étudiants mettent des \Leftrightarrow alors qu'il y a seulement une implication. Il faut donc s'appliquer pour chaque \Leftrightarrow à vérifier qu'il y a bien implication et implication réciproque pour ne pas faire d'erreur dans le raisonnement.



Remarque

Si l'on applique une fonction f à une égalité ou une inégalité de réels, il faut justifier la bijectivité de f (le plus souvent en disant que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle auquel appartiennent les éléments de l'équivalent) pour obtenir une relation d'équivalence, et pas juste une implication.

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Corrigé

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ , on a :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1$$

soit encore :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

et comme $x > 0$:

$$x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$$

Donc : $x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$

Méthode 15

Par implication directe puis implication réciproque



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence lorsqu'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, il faut raisonner par implication directe puis implication réciproque.

On montre d'abord l'implication directe ($H \Rightarrow P$) : « Supposons H , montrons P ».

Puis on montre l'implication réciproque ($P \Rightarrow H$) : « Supposons P , montrons H ».

Exercice 15

Pour A une partie de \mathbb{R} , on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de \mathbb{R} .

Montrer que :

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$$

Corrigé

► Supposons ($\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$), montrons que $A = B$.

◇ Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, on a : $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
Or $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ donc : $x \in B$
Ainsi : $A \subset B$.

◇ Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, on a : $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
Or $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x)$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et : $x \in A$.
Donc $B \subset A$ et ainsi : $A = B$.

► Supposons $A = B$, montrons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors ou bien $x \in A$ (et alors $x \in B$), donc :
 $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$, ou bien $x \notin A$ (et alors $x \notin B$),
donc on a : $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_B(x)$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$$

et donc : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

Finalement : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$

1.2. Récurrence



Remarque

1. Lorsque l'on doit faire une récurrence, deux cas de figure peuvent se présenter.
 - L'hypothèse de récurrence est donnée par l'énoncé : il suffit alors d'appliquer la méthode de récurrence adaptée.
 - L'hypothèse de récurrence n'est pas donnée par l'énoncé : il faut alors réfléchir au brouillon pour déterminer cette hypothèse de récurrence.
2. Attention à ces erreurs fréquentes.
 - Dans le cas d'une récurrence portant sur un entier n , le $\forall n$ doit être placée avant la proposition $\mathcal{P}(n)$ et non à l'intérieur de celle-ci.
 - Au niveau de l'hérédité on choisit de raisonner sur un entier n quelconque **fixé** et non $\forall n$.

Question 6

Comment prouver une proposition par récurrence ?

Méthode 16

Par récurrence simple



POINT MÉTHODOLOGIQUE

On utilise une récurrence simple sur n dans \mathbb{N} pour montrer une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant de n et quand on dispose d'un lien permettant de passer de $\mathcal{P}(n)$ à $\mathcal{P}(n+1)$, par exemple pour calculer une somme ou un produit fini, le terme général d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou encore une expression explicitée directement en fonction de n .

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour n_0 : montrer $\mathcal{P}(n_0)$ vraie.
- 3) Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+1)$.
- 4) On conclut.

Exercice 16

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $(1+x)^n \geq 1+nx$ » est vraie.

◇ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0 \times x$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, *i.e.* :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

En multipliant par $1+x \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2\end{aligned}$$

Or $nx^2 \geq 0$, et donc :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

◇ Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}$



Remarque

L'expression en jeu dépend ici de deux éléments distincts : un réel x et un entier n . Il y a alors deux possibilités de rédaction :

- 1) Fixer le réel x en amont puis rédiger la propriété de récurrence en fonction de n . Le réel x est, dans toute la récurrence, quelconque et fixé.
- 2) Ne pas fixer le x en amont et l'inclure dans la propriété de récurrence. Dans cet exemple, la proposition serait alors $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$ ».

Méthode 17

Par récurrence double (ou plus)



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Ce type de récurrence s'utilise quasiment exclusivement pour montrer un résultat portant sur une suite sur laquelle on possède une relation liant au moins trois termes consécutifs d'une suite, par exemple u_{n+2} , u_{n+1} et u_n . Voici comment procéder :

- 1) Nommer la propriété de récurrence, $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour pour n_0 et $n_0 + 1$.

Attention à ne pas oublier d'initialiser la propriété pour deux entiers, et pas uniquement pour n_0 .

- 3) Démontrer l'hérédité : on fixe un n supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+2)$.
- 4) On conclut.

Exercice 17

La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*$$

Corrigé

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ».

- ◇ $u_0 = u_1 = 1$ et $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.
Alors $u_n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Donc, comme la somme de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel non nul, $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
- ◇ Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}^*$



Remarque

Nous avons jusqu'ici vu les récurrences simples et doubles. Des récurrences triples, quadruples ou plus peuvent de même être menées. Pour réaliser une récurrence d'ordre p , il faut :

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
- 2) Initialiser la propriété pour les p premiers termes.
- 3) Démontrer l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$, ... et $\mathcal{P}(n+p-1)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+p)$.
- 4) On conclut.

L'exercice ci-dessous illustre une récurrence triple.

Exercice 18

Extrait d'ESSEC

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1, 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \quad (1)$$

Soit v une suite vérifiant (1) telle que : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.
Montrer que :

$$\forall n \geq 1, v_n = 0$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 0$ ».

- ◇ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ d'où $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ vraies. (v_n) vérifie (1) donc :

$$9v_{n+3} = 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n$$

et alors, par hypothèses de récurrence :

$$9v_{n+3} = 0$$

d'où :

$$v_{n+3} = 0$$

donc $\mathcal{P}(n+3)$ vraie.

- ◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0}$

Méthode 18



Par récurrence forte

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode s'applique quasiment exclusivement aux suites définies avec une relation liant u_{n+1} à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_n$. Voici comment procéder :

- 1) Nommer la propriété de récurrence $\mathcal{P}(n)$
- 2) Initialiser la propriété pour n_0 .
- 3) Démontrer à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1), \dots$, et $\mathcal{P}(n)$. On montre alors $\mathcal{P}(n+1)$.
- 4) On conclut.

Si la récurrence simple est possible, elle doit être privilégiée à la récurrence forte. La récurrence forte ne doit être utilisée que si la récurrence simple ne fonctionne pas.

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n$$

Corrigé

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 2^n$ ».

- ◇ $u_0 = 1 \leq 2^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ soient vraies.

Par sommation des $n + 1$ inégalités des hypothèses de récurrence, il vient :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

soit encore :

$$u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n 2^k$$

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &\leq 2^{n+1} - 1 \\ &\leq 2^{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $u_{n+1} \leq 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie

◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2^n}$

1.3. Ensembles

Question 7 Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?

Méthode 19 En montrant que pour $x \in A$, $x \in B$



RAPPEL DE COURS

A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B .
On a de plus :

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$



POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, pour montrer que A est inclus dans B , on montre que tout élément de A appartient à B .

Il arrive parfois qu'il ne soit pas simple de prouver l'inclusion $A \subset B$ directement en montrant que tout élément de A appartient à B . Dans ce cas, on peut montrer que tout élément de \overline{B} (*i.e.* n'appartenant pas à B) appartient à \overline{A} (*i.e.* n'appartient pas non plus à A).



RAPPEL DE COURS

- $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$
- $x \in B \cap C$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in C$

Distributivité

- Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et B des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcup_{i=0}^n (A_i \cap B) \right)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right) = \left(\bigcap_{i=0}^n (A_i \cup B) \right)$$

Lois de Morgan

- Soient A et B des ensembles. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ensembles. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\overline{\left(\bigcap_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcup_{i=0}^n \overline{A_i} \right) \quad \text{et} \quad \overline{\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)} = \left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i} \right)$$

Exercice 20

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux familles d'ensembles tels que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \overline{A_i} \subset \overline{B_i}$$

Soit C un ensemble. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right) \subset \bigcap_{i=0}^n (C \cup \overline{B_i})$$

Corrigé

Soit $n \geq 0$ et $x \in C \cup \left(\bigcup_{i=0}^n A_i \right)$. D'après les lois de Morgan, on a :

$$\bigcup_{i=0}^n A_i = \overline{\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i}}$$