J'intègre

1re année ECG

PROGRAMMES 2021

Mathématiques approfondies Informatique

QUESTIONS ET MÉTHODES

Coordonné par O. SARFATI et M. ALFRÉ

DUNOD

Couverture :
- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082627-8

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation ».** Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.
Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté.
- **Annoter également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 4 à 5 fois sur vos deux années de prépas.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de vos deux années de prépa, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.
En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.
Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Généralités

Partie II. Algèbre

Partie III. Analyse

Partie IV. Probabilités

Partie V. Informatique

Partie I
Généralités

Chapitre 1

Récurrence, Logique, Ensembles, Applications

On commence par un chapitre très structurant pour vos deux années. Les démonstrations par récurrence seront notamment présentes dans bien des chapitres (suites, séries, probabilités, variables aléatoires, matrices...) tandis que les démonstrations par l'absurde ou les raisonnements par équivalences vous suivront à peu près partout ! Les notions d'applications injectives, surjectives ou bijectives interviendront quelque peu en analyse mais mobiliseront surtout votre attention sur les chapitres d'algèbre linéaire. Vous l'aurez compris, il ne faut pas négliger ce chapitre introductif alors n'hésitez pas à vous y plonger et à y revenir régulièrement.

DANS CE CHAPITRE

17 questions classiques
35 méthodes
42 exercices

Sommaire

1.1. Logique

Question 1 Comment déterminer le contraire d'une proposition ?

Méthode 1 En écrivant le contraire de chaque élément de la proposition

RAPPEL DE COURS

Soit A un ensemble, P et Q des propositions.
On note $\overline{P}$ (ou non P) le contraire de P.
On rappelle que $\forall$ se lit « pour tout » et $\exists$ se lit « il existe ».

- Le contraire de « $a \geqslant b$ » est « $a < b$ » .
- Le contraire de « $\forall x \in A, P_x$ » est « $\exists x \in A, \overline{P_x}$ » .
  Par exemple : le contraire de « $\forall x \geqslant 1,\ f(x) < 1$ » est :
  $$\text{« } \exists x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant 1 \text{ »}$$
- Le contraire de $(\exists x \in A, P)$ est $(\forall x \in A, \overline{P})$.
- Le contraire de « P et Q » est « $\overline{P}$ ou $\overline{Q}$ ».
- Le contraire de « P ou Q » est « $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ ».

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer le contraire d'une proposition, on procède en respectant les règles sur les contraires ci-dessus, en écrivant le contraire de chaque composant de la proposition. On commence par l'élément de gauche, puis on écrit le contraire des différents éléments jusqu'au dernier élément de droite. Le brouillon de l'exercice ci-dessous permet de mieux comprendre la méthode à appliquer.

Exercice 1

Ecrire le contraire de :
« $\forall x > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{n} \leqslant x\right)$ »

Corrigé

Brouillon

- Le contraire de « $\forall x > 0,\ P_x$ » est :
  $$\text{« } \exists x > 0,\ \overline{P_x} \text{ »}$$
- Le contraire de « $\exists N \in \mathbb{N},\ P_N$ » est
  $$\text{« } \forall N \in \mathbb{N},\ \overline{P_N} \text{ »}$$

- Le contraire de « $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ » est

$$\text{« } \exists n \in \mathbb{N},\ \overline{P_n} \text{ »}$$

- Le contraire de « $(n \geqslant N) \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \leqslant x\right)$ » est :

$$\text{« } \exists n \geqslant N \text{ tel que : } \frac{1}{n} > x \text{ »}$$

Le contraire de la proposition est :

$$\boxed{\exists x > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in N \text{ tel que : } (n \geqslant N) \text{ et } \left(\frac{1}{n} > x\right)}$$

Question 2

Comment montrer qu'une proposition est vraie ?

Méthode 2

Pour un $\forall$, en montrant que pour un x quelconque vérifiant les conditions, la proposition est vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\forall x \in A, ...$ » signifie que quel que soit x pris dans A, la proposition qui suit est vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, on prend donc un x quelconque dans A (on commence le raisonnement par « soit $x \in A$ »), puis on va chercher à montrer la proposition qui suit.

Exercice 2

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x \geqslant -1$.

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geqslant 0$$

Donc :

$$x^2 + 2x + 1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad cx^2 + 2x \geqslant -1$$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x \geqslant -1}$

Méthode 3

Pour un $\exists$, en trouvant un x vérifiant les conditions telle que la proposition soit vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble, « $\exists x \in A, \ldots$ » signifie qu'on peut trouver x dans A tel que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer que cela est vrai, il faut donc trouver un x tel que la proposition soit vérifiée (un raisonnement comme cela peut se terminer par exemple par « Donc pour $x = \ldots$, on a bien... »)

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 5x + 2 \end{cases}$

Montrer que $\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 2$

Corrigé

Pour $x = 0$:

$$f(x) = f(0) = 2$$

Donc : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2}$

Méthode 4

En combinant les deux méthodes précédentes s'il y a à la fois un $\forall$ et un $\exists$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Souvent, la proposition à prouver contiendra à la fois $\forall$ et $\exists$. Il faudra donc combiner les méthodes 1 et 2 vues ci-dessus pour pouvoir montrer que la proposition est vraie.

Exercice 4

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x + 1$.
On a $x + 1 \geqslant x$ donc $y \geqslant x$.

Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y}$

Méthode 5

Si la phrase est écrite en français et non en langage mathématique, en traduisant l'expression en termes quantifiés puis en utilisant les méthodes précédentes

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition à montrer est du type « Montrer que... » avec des termes en français et non des termes quantifiés, il faut d'abord traduire la phrase en termes quantifiés pour pouvoir ensuite utiliser les méthodes 1,2 et 3 vues ci-dessus pour montrer que la proposition est vraie.

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ décroissantes sur $\mathbb{R}$ et $h = f \circ g$. Montrer que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Montrons que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ h(x) \leqslant h(y)$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $x \leqslant y$. Comme g est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$g(x) \geqslant g(y)$$

et alors, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$f(g(x)) \leqslant f(g(y))$$

d'où :

$$h(x) \leqslant h(y)$$

Donc : $\boxed{h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

Méthode 6

Par l'absurde

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut raisonner par l'absurde : on suppose que le contraire de la proposition est vrai, puis on poursuit le raisonnement jusqu'à aboutir à une contradiction. Notre supposition étant fausse, le contraire de la proposition est donc faux, et donc la proposition est vraie.
Les raisonnements par l'absurde sont très utiles, notamment dans les chapitres d'algèbre linéaire.

Exercice 6

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\},\ \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Corrigé

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus\{-2\}$ tel que : $\dfrac{x+1}{x+2} = 1.$
On a alors :

$$x + 1 = x + 2$$

donc $1 = 2$, ce qui est absurde. On a une contradiction, donc la supposition est fausse.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1}$

Méthode 7

Pour un ∃! (ou un ∃), par analyse synthèse

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour A un ensemble,« $\exists! x \in A, ...$ » se lit « il existe un unique x appartenant à A tel que... » et signifie qu'on peut trouver un et un seul x dans A telle que la proposition qui suit soit vérifiée. Pour montrer cela, on peut procéder par analyse synthèse, c'est un raisonnement en deux étapes :

- **Etape 1 :** L'analyse (pour montrer l'unicité sous réserve d'existence).

  On suppose l'existence et on va, par une série de déductions, trouver une liste de candidats solutions $x_1, \ldots, x_n$ (que l'on va expliciter) qui peuvent vérifier les conditions.
- **Etape 2 :** La synthèse (pour montrer l'existence). Pour chacun des candidats solution trouvés dans l'analyse, on regarde s'il vérifie bien les conditions. En cas d'unicité, ou bien il y aura un unique candidat solution, qui vérifie bien les conditions, ou bien il y aura plusieurs candidats mais un seul vérifiera les conditions.

Exercice 7

Notons F l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, P l'ensemble des fonctions paires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I l'ensemble des fonctions impaires définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\forall f \in F,\ \exists!(p, i) \in P \times I,\ f = p + i$$

RAPPEL DE COURS

- Pour A et B deux ensembles, $(x, y) \in A \times B$ signifie que $x \in A$ et $y \in B$
- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ p(-x) = p(x)$
- $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ i(-x) = -i(x)$

Corrigé

Soit $f \in F$, montrons que $\exists!(p,i) \in P \times I,\ f = p + i$.
Procédons par analyse-synthèse.

◇ *Analyse*

Supposons qu'il existe $(p,i) \in P \times I$ tels que $f = p + i$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme p est paire et i est impaire, on a :

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

En faisant la somme de ces égalités d'une part, la différence d'autre part, on obtient :

$$\begin{cases} f(x) + f(-x) = 2p(x) \\ f(x) - f(-x) = 2i(x) \end{cases}$$

et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

◇ *Synthèse*

Soit p et i les fonctions définies par, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

et :

$$\begin{cases} p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} \\ i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} p(-x) = p(x) \\ i(-x) = -i(x) \end{cases}$$

Donc p est paire et i est impaire. Donc p et i conviennent.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall f \in F,\ \exists!(p,i) \in P \times I,\ f = p + i}$$

Méthode 8 **Pour un $\exists!$, en raisonnant par équivalence**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer un $\exists!$ lorsqu'il s'agit d'une équation, et qu'on cherche donc à prouver que cette équation admet une unique solution, on peut partir de l'équation et raisonner par équivalences successives jusqu'à arriver à une unique solution. **Attention**, l'utilisation des équivalents est source de nombreuses erreurs : si vous procédez par équivalences successives, assurez-vous que le sens direct et le sens réciproque sont vérifiés pour chaque équivalence. Trop souvent, les étudiants écrivent une équivalence alors qu'il n'y a en réalité qu'une implication.

Exercice 8 Montrer que : $\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=1$ et $3x-2y=1$.

Corrigé Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ 4x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+2y=1 \text{ et } 3x-2y=1}$

Méthode 9 **Pour montrer qu'une équation du type $f(x)=a$ admet une unique solution, en utilisant le théorème de la bijection**

RAPPEL DE COURS

Soit f une fonction de I (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f établit une bijection de I dans $f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert), et on a $\forall a \in f(I),\ \exists! x \in I,\ f(x)=a$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la proposition est de la forme $\exists!\ x \in I, f(x) = a$ où $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors on peut parfois montrer cette proposition en utilisant le théorème de la bijection. Il faut alors montrer que f est continue et strictement monotone sur I, et que $a \in f(I)$. Attention à ne pas vous tromper pour déterminer $f(I)$:
Par exemple, si f est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, a]$, alors :

$$f(I) = \left] \lim_{x\to-\infty} f(x), f(a) \right]$$

Exercice 9

Soit $n \geqslant 2$, montrer que : $\exists! x \in]1, +\infty[\,,\ x^n - x - 1 = 0$

Corrigé

Posons $f : \left| \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n - x - 1 \end{array} \right.$.

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que fonction polynôme et :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[\,,\ f'(x) &= nx^{n-1} - 1 \\ &\geqslant n - 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

f est donc strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$. De plus on a :

$$f(1) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f établit une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]-1, +\infty[$. Or 0 appartient à $]-1, +\infty[$, donc :

$$\exists!\ x \in]1, +\infty[,\ f(x) = 0$$

Ainsi : $\boxed{\exists!\, x \in]1, +\infty[\,,\ x^n - x - 1 = 0}$

Question 3 Comment montrer qu'une proposition est fausse ?

Méthode 10 S'il s'agit d'un $\forall$, en trouvant un contre-exemple

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition commençant par « $\forall x \in A$ » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple (un seul suffit, il ne faut pas raisonner dans le cas général), i.e. trouver un x dans A telle que la proposition ne soit pas vérifiée.

Exercice 10

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \Rightarrow \sin(x) \leqslant \sin(y)$$

Corrigé

Pour $x = 0$ et $y = \dfrac{3\pi}{2}$, on a : $x \leqslant y$. Et pourtant on a :

$$\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(y) = -1$$

donc :

$$\sin(x) > \sin(y)$$

Donc : $\boxed{\text{La proposition est fausse}}$

Méthode 11

S'il s'agit d'un ∃, en montrant que quel que soit le *x* choisi vérifiant les conditions, la proposition n'est pas vérifiée

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une proposition du type "$\exists x \in A,\ P$" est fausse, il faut montrer que "$\forall x \in A,\ \overline{P}$". En effet, si quel que soit x dans A, P n'est pas vérifiée, alors on ne peut pas trouver de x dans A tel que P soit vérifiée.

Exercice 11

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = -2$$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 - 1 \geqslant -1$ et donc :

$$x^2 - 1 > -2$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \neq -2$$

Donc : $\boxed{\text{La proposition est fausse}}$

Question 4

Comment montrer une implication directe $(H \Rightarrow P)$?

Méthode 12

En supposant H vraie, et en montrant P vraie

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que $(H \Rightarrow P)$, on commence la rédaction par « supposons H », et on cherche à montrer que P est vraie.

Exercice 12

Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Rightarrow x = y$.

Corrigé

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y$. e^x et e^y sont strictement positifs donc en composant par ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(\mathrm{e}^x) = \ln(\mathrm{e}^y)$$

Or on a :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^u) = u$$

Donc : $x = y$

Ainsi : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Rightarrow x = y}$

Méthode 13

Par contraposée

RAPPEL DE COURS

- La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
- Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une implication est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie. On va donc montrer que le contraire de Q implique le contraire de P.

Exercice 13

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leqslant b)$$

Corrigé

Montrons la contraposée : $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ a \geqslant b + \varepsilon)$.
Supposons $a > b$. On a : $a - b > 0$.

Posons $\varepsilon = a - b$. On a alors $\varepsilon > 0$. On a bien $a \geqslant b + \varepsilon$ car $b + \varepsilon = b + a - b = a$.
Donc $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ \ a \geqslant b + \varepsilon)$

Ainsi, par contraposée : $\boxed{(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow (a \leqslant b)}$

Question 5 Comment montrer une équivalence $(H \Leftrightarrow P)$?

RAPPEL DE COURS

Vocabulaire On dit que P est une **condition nécessaire** pour H si et seulement si $H \Rightarrow P$
On dit que P est une **condition suffisante** pour H si et seulement si $P \Rightarrow H$
On dit que P est une **condition nécessaire et suffisante** pour H si et seulement si $H \Leftrightarrow P$

Méthode 14 En raisonnant par équivalences successives

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence $(H \Leftrightarrow P)$, on peut raisonner par équivalences successives, en partant de H jusqu'à arriver à P (ou dans l'autre sens). On a un raisonnement de la forme suivante : $H \Leftrightarrow A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow P$
Attention, ce raisonnement peut être source d'erreurs car de nombreux étudiants mettent des $\Leftrightarrow$ alors qu'il y a seulement une implication. Il faut donc s'appliquer pour chaque $\Leftrightarrow$ à vérifier qu'il y a bien implication et implication réciproque pour ne pas faire d'erreur dans le raisonnement.

Remarque

Si l'on applique une fonction f à une égalité ou une inégalité de réels, il faut justifier la bijectivité de f (le plus souvent en disant que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle auquel appartiennent les éléments de l'équivalent) pour obtenir une relation d'équivalence, et pas juste une implication.

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geqslant 0$$

Corrigé

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant 1$$

soit encore :

$$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geqslant 0$$

et comme $x > 0$:

$$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geqslant 0$$

Donc : $\boxed{x \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geqslant 0}$

Méthode 15 **Par implication directe puis implication réciproque**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer une équivalence lorsqu'on ne peut pas raisonner par équivalences successives, il faut raisonner par implication directe puis implication réciproque.
On montre d'abord l'implication directe ($H \Rightarrow P$) : « Supposons H, montrons P ».
Puis on montre l'implication réciproque ($P \Rightarrow H$) : « Supposons P, montrons H ».

Exercice 15

Pour A une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$$

Corrigé

- Supposons ($\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$), montrons que $A = B$.
  - Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, on a : $\mathbb{1}_A(x) = 1$.
    Or $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$ donc : $x \in B$
    Ainsi : $A \subset B$.
  - Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, on a : $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
    Or $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x)$ donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et : $x \in A$.
    Donc $B \subset A$ et ainsi : $A = B$.
- Supposons $A = B$, montrons que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors ou bien $x \in A$ (et alors $x \in B$), donc : $\mathbb{1}_A(x) = 1 = \mathbb{1}_B(x)$, ou bien $x \notin A$ (et alors $x \notin B$), donc on a : $\mathbb{1}_A(x) = 0 = \mathbb{1}_B(x)$.
  Ainsi :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$$
  et donc : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$

Finalement : $\boxed{\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B}$

1.2. Récurrence

Remarque

1. Lorsque l'on doit faire une récurrence, deux cas de figure peuvent se présenter.
   - L'hypothèse de récurrence est donnée par l'énoncé : il suffit alors d'appliquer la méthode de récurrence adaptée.
   - L'hypothèse de récurrence n'est pas donnée par l'énoncé : il faut alors réfléchir au brouillon pour déterminer cette hypothèse de récurrence.
2. Attention à ces erreurs fréquentes.
   - Dans le cas d'une récurrence portant sur un entier n, le $\forall n$ doit être placée avant la proposition $\mathscr{P}(n)$ et non à l'intérieur de celle-ci.
   - Au niveau de l'hérédité on choisit de raisonner sur un entier n quelconque **fixé** et non $\forall n$.

Question 6 Comment prouver une proposition par récurrence ?

Méthode 16 Par récurrence simple

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On utilise une récurrence simple sur n dans $\mathbb{N}$ pour montrer une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de n et quand on dispose d'un lien permettant de passer de $\mathscr{P}(n)$ à $\mathscr{P}(n+1)$, par exemple pour calculer une somme ou un produit fini, le terme général d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, ou encore une expression explicitée directement en fonction de n.

1) Nommer la propriété de récurrence $\mathscr{P}(n)$.
2) Initialiser la propriété pour n_0 : montrer $\mathscr{P}(n_0)$ vraie.
3) Procéder à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathscr{P}(n)$. On montre alors $\mathscr{P}(n+1)$.
4) On conclut.

Exercice 16 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ » est vraie.

- ◇ $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \times x$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, *i.e.* :

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$

En multipliant par $1+x \geqslant 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &\geqslant (1+nx)(1+x)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\end{aligned}$$

Or $nx^2 \geqslant 0$, et donc :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$

D'où $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- ◇ Finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1+nx}$

Remarque

L'expression en jeu dépend ici de deux éléments distincts : un réel x et un entier n. Il y a alors deux possibilités de rédaction :

1) Fixer le réel x en amont puis rédiger la propriété de récurrence en fonction de n. Le réel x est, dans toute la récurrence, quelconque et fixé.
2) Ne pas fixer le x en amont et l'inclure dans la propriété de récurrence. Dans cet exemple, la proposition serait alors $\mathscr{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$ ».

Méthode 17 Par récurrence double (ou plus)

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Ce type de récurrence s'utilise quasiment exclusivement pour montrer un résultat portant sur une suite sur laquelle on possède une relation liant au moins trois termes consécutifs d'une suite, par exemple $u_{n+2},\ u_{n+1}$ et u_n. Voici comment procéder :

1) Nommer la propriété de récurrence, $\mathscr{P}(n)$.
2) Initialiser la propriété pour pour n_0 et n_0+1.
   Attention à ne pas oublier d'initialiser la propriété pour deux entiers, et pas uniquement pour n_0.

3) Démontrer l'hérédité : on fixe un n supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$. On montre alors $\mathscr{P}(n+2)$.
4) On conclut.

Exercice 17

La suite de Fibonacci est définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}^*$$

Corrigé

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ».

- $u_0 = u_1 = 1$ et $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies.
  Alors $u_n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
  Donc, comme la somme de deux entiers naturels non nuls est un entier naturel non nul, $u_{n+2} \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}^*}$

Remarque

Nous avons jusqu'ici vu les récurrences simples et doubles. Des récurrences triples, quadruples ou plus peuvent de même être menées. Pour réaliser une récurrence d'ordre p, il faut :

1) Nommer la propriété de récurrence $\mathscr{P}(n)$.
2) Initialiser la propriété pour les p premiers termes.
3) Démontrer l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1), \dots$ et $\mathscr{P}(n+p-1)$. On montre alors $\mathscr{P}(n+p)$.
4) On conclut.

L'exercice ci-dessous illustre une récurrence triple.

Exercice 18

Extrait d'ESSEC

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant :

$$\forall n \geqslant 1,\ 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0 \qquad (1)$$

Soit v une suite vérifiant (1) telle que : $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.
Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = 0$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$: « $v_n = 0$ ».

- ◇ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ d'où $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2)$ et $\mathscr{P}(3)$ sont vraies.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ vraies. (v_n) vérifie (1) donc :

$$9v_{n+3} = 9v_{n+2} + 7v_{n+1} - 7v_n$$

et alors, par hypothèses de récurrence :

$$9v_{n+3} = 0$$

d'où :

$$v_{n+3} = 0$$

donc $\mathscr{P}(n+3)$ vraie.

- ◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 0}$

Méthode 18

Par récurrence forte

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode s'applique quasiment exclusivement aux suites définies avec une relation liant u_{n+1} à $u_{n_0}, u_{n_0+1}, ..., u_n$ Voici comment procéder :

1) Nommer la propriété de récurrence $\mathscr{P}(n)$
2) Initialiser la propriété pour n_0.
3) Démontrer à l'hérédité. On pose un n fixé supérieur ou égal à n_0 et on suppose $\mathscr{P}(n_0)$, $\mathscr{P}(n_0+1), ...,$ et $\mathscr{P}(n)$. On montre alors $\mathscr{P}(n+1)$.
4) On conclut.

Si la récurrence simple est possible, elle doit être privilégiée à la récurrence forte. La récurrence forte ne doit être utilisée que si la récurrence simple ne fonctionne pas.

Exercice 19

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n$$

Corrigé

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \leqslant 2^n$ ».

- ◇ $u_0 = 1 \leqslant 2^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies.

Par sommation des $n+1$ inégalités des hypothèses de récurrence, il vient :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n \leqslant 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n$$

soit encore :

$$u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

On reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leqslant \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &\leqslant 2^{n+1}-1 \\ &\leqslant 2^{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $u_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

◇ Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n}$

1.3. Ensembles

Question 7 Comment montrer une inclusion d'ensembles ($A \subset B$) ?

Méthode 19 En montrant que pour $x \in A$, $x \in B$

RAPPEL DE COURS

A est inclus dans B si tout élément de A appartient à B.
On a de plus :

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Le plus souvent, pour montrer que A est inclus dans B, on montre que tout élément de A appartient à B.
Il arrive parfois qu'il ne soit pas simple de prouver l'inclusion $A \subset B$ directement en montrant que tout élément de A appartient à B. Dans ce cas, on peut montrer que tout élément de $\overline{B}$ (*i.e.* n'appartenant pas à B) appartient à $\overline{A}$ (*i.e.* n'appartient pas non plus à A).

RAPPEL DE COURS

- $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$
- $x \in B \cap C$ si et seulement si $x \in B$ et $x \in C$

Distributivité

- Soient A, B et C des ensembles. On a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et B des ensembles. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$B \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right) = \left(\bigcup_{i=0}^{n} (A_i \cap B) \right)$$
$$B \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i \right) = \left(\bigcap_{i=0}^{n} (A_i \cup B) \right)$$

Lois de Morgan

- Soient A et B des ensembles. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ des ensembles. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\overline{\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i \right)} = \left(\bigcup_{i=0}^{n} \overline{A_i} \right) \quad \text{et} \quad \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)} = \left(\bigcap_{i=0}^{n} \overline{A_i} \right)$$

Exercice 20

Soient $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux familles d'ensembles tels que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \ \overline{A_i} \subset \overline{B_i}$$

Soit C un ensemble. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ C \cup \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)} \subset \bigcap_{i=0}^{n} (C \cup \overline{B_i})$$

Corrigé

Soit $n \geqslant 0$ et $x \in C \cup \overline{\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right)}$. D'après les lois de Morgan, on a :

$$\overline{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} = \bigcap_{i=0}^{n} \overline{A}_i$$