j'intègre

ECG
2e année
NOUVEAU PROGRAMME

Mathématiques approfondies Informatique

QUESTIONS ET METHODES

Coordonné par Olivier Sarfati

Olivier Sarfati
Diplômé d'HEC, directeur de MyPrepa et professeur chez MyPrepa

Paul-Louis Donnard
Diplômé d'HEC et de Polytechnique, enseignant chez MyPrepa

Baptiste Frelot
Diplômé d'HEC, enseignant chez MyPrepa

Antoine Lagarde
Diplômé d'HEC et des Mines de Paris, enseignant chez MyPrepa

Florian Marty
Agrégé de mathématiques, enseignant au lycée Saliège en voie ECG

Fabio Russo
Enseignant chez MyPrepa, diplômé de l'ESSEC

DUNOD

Couverture :
- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

© Dunod, 2022
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083742-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation ».** Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté. Les exercices difficiles sont signalés par un ♠, abordez-les une fois que vous êtes suffisamment à l'aise sur le chapitre.
- **Annotez également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 2 à 3 fois pendant votre deuxième année.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de votre deuxième année, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Algèbre

Partie II. Analyse

Partie III. Probabilités

Partie IV. Informatique

Partie I

Algèbre

Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

Peut-être avez-vous déjà vu une partie des notions de ce chapitre en première année. On généralise la somme directe à plusieurs espaces vectoriels et non plus deux, on reparle de stabilité et de trace, mais on introduit surtout le changement de base, essentiel pour le chapitre à suivre sur la diagonalisation.

DANS CE CHAPITRE

9 questions classiques

17 méthodes

21 exercices

Sommaire

1.1. Somme directe de sous-espaces vectoriels

Question 1 **Comment montrer $F_1 + ... + F_n = E$?**

Méthode 1 **En montrant que** $\forall x \in E,\ \exists (x_1, x_2, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n, \quad x = x_1 + ... + x_n$

RAPPEL DE COURS

Soit E un espace vectoriel et $F_1, ..., F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Par définition, $F_1 + F_2 + ... + F_n$ est l'ensemble

$$\{x_1 + x_2 + ... + x_n,\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_n\}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que $F_1 + F_2 + ... + F_n = E$, il faut prendre un x quelconque dans E et trouver $x_1, x_2, ..., x_n$ respectivement dans $F_1, F_2, ..., F_n$ tels que $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

On montre ainsi l'inclusion $E \subset F_1 + F_2 + ... + F_n$. L'inclusion réciproque étant évidente puisque $F_1, F_2, ..., F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on peut alors conclure.

Exercice 1

Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$. Soient $M_1, ..., M_k$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M_1 + M_2 + ... + M_k = I_n$

On pose $\forall i \in [\![1, k]\!],\ G_i = \{M_i X,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i$.

Corrigé

Soit $X \in E$, $M_1 + ... + M_k = I_n$.

Donc $(M_1 + ... + M_k)X = I_n X$

Donc $\underbrace{M_1 X}_{\in G_1} + ... + \underbrace{M_k X}_{\in G_k} = X$ d'où $X \in \displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i$

Ainsi $E \subset \displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i$, or $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i \subset E$ donc $\boxed{E = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i.}$

Question 2 **Comment montrer que n espaces vectoriels F_1,F_2,...,F_n (avec $n \geqslant 3$) sont en somme directe ?**

Remarque

Attention ! Montrer que l'intersection des sous-espaces vectoriels est égale à $\{0\}$ ne permet pas de prouver cette question pour $n \geqslant 3$. C'est une erreur fréquente : cette méthode ne fonctionne que lorsqu'il faut montrer que **deux** sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

RAPPEL DE COURS

Soit $n \geqslant 3$. Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, ..., F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

$F_1, F_2, ..., F_n$ sont en somme directe si et seulement si

$$\forall x \in F_1+...+F_n,\ \exists!\ (x_1, ..., x_n) \in F_1\times...\times F_n,\ \ x = x_1+...+x_n$$

Méthode 2

En montrant que tout vecteur de $F_1 + F_2 + ... + F_n$ s'exprime de manière unique comme somme d'un élément de F_1, d'un élément de $F_2, ...$ et d'un élément de F_n

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que n sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, ..., F_n$ sont en somme directe, on prend un x quelconque dans $F_1 + F_2 + ... + F_n$, et on montre qu'il existe un unique x_1 dans F_1, x_2 dans $F_2, ..., x_n$ dans F_n tels que $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

L'existence est évidente par définition de $F_1 + F_2 + ... + F_n$.

Il s'agit donc de montrer l'unicité de la décomposition de x.

Exercice 2

Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R} \right\}$

$C = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix},\ d \in \mathbb{R} \right\}$

Montrer que A, B et C sont en somme directe.

Corrigé

Soit $M \in A + B + C$, $\exists (N, R, S) \in A \times B \times C$ tel que : $M = N + R + S$, et donc $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Montrons l'unicité de la décomposition.

Soit $(N', R', S') \in A \times B \times C$ tel que $M = N' + R' + S'$

Alors $\exists (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a' & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c' & 0 & 0 \\ c' & 0 & 0 \\ c' & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} a+c+d & a & b \\ c & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+c'+d' & a' & b' \\ c' & 0 & 0 \\ c' & 0 & d' \end{pmatrix}$

Donc $a = a',\ b = b',\ c = c',\ d = d'$.

Donc $R = R',\ N = N',\ S = S'$.

Il y a donc unicité de la décomposition.

Donc $\boxed{A, B, C \text{ sont en somme directe.}}$

Méthode 3

En montrant que la juxtaposition d'une base de F_1, d'une base de F_2, ... et d'une base de F_n forme une famille libre

RAPPEL DE COURS

Soit $n \geqslant 3$. Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, ..., F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

$F_1, F_2, ..., F_n$ sont en somme directe si et seulement si la juxtaposition d'une base de F_1, d'une base de F_2,..., et d'une base de F_n forme une famille libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que des sous-espaces vectoriels de dimension finie $F_1, F_2, ...$ et F_n sont en somme directe, on peut trouver une base de chacun d'eux et montrer que la juxtaposition de ces bases forme une famille libre.

Exercice 3

♠ Soit $n \geqslant 3$.

On note pour $k \in [\![0, n]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}(X^k(1-X)^{n-k})$.

Montrer que $F_0, F_1, ..., F_n$ sont en somme directe.

Corrigé

- $\forall k \in [\![0, n]\!],\ X^k(1-X)^{n-k} \neq 0$

Donc pour $k \in [\![0, n]\!]$, $(X^k(1-X)^{n-k})$ est une famille libre, or elle est génératrice de F_k, donc c'est une base de F_k.

- Montrons que

$((1-X)^n, X(1-X)^{n-1}, X^2(1-X)^{n-2}, ..., X^{n-1}(1-X), X^n)$

est une famille libre.
Notons pour $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, supposons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$

Posons pour $k \in [\![0,n]\!]$, $H(k)$: "$\lambda_0 = ... = \lambda_k = 0$".
- $\underline{n=0}$: pour $k \in [\![1,n]\!]$, $P_k(0) = 0$ et $P_0(0) = 1$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(0) = \lambda_0$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$ donc $\lambda_0 = 0$

Ainsi $H(0)$ est vraie.
- Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons $H(k)$, montrons $H(k+1)$.

On a $\lambda_0 = ... = \lambda_k = 0$ d'après $H(k)$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i P_i = 0 \quad (*)$.

$P_{k+1} = X^{k+1}(X-1)^{n-k+1}$ donc 0 est racine d'ordre $k+1$ de P_{k+1}

Donc $P_{k+1}^{(k)}(0) = 0$ et $P_{k+1}^{(k+1)}(0) \neq 0$

Cas 1 : $k \in [\![0, n-2]\!]$.
Pour $i \in [\![k+2, n]\!]$, $P_i = X^i(1-X)^{n-i}$. Donc 0 est racine d'ordre au moins $k+2$ de P_i, d'où $P_i^{(k+1)}(0) = 0$.
Donc en dérivant $(k+1)$ fois l'équation $(*)$, on obtient :

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i P_i^{(k+1)} = 0 \text{ donc } \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i P_i^{k+1}(0) = 0$$

D'où $\lambda_{k+1} P_{k+1}^{(k+1)}(0) = 0$ et $\lambda_{k+1} = 0$ car $P_{k+1}^{(k+1)}(0) \neq 0$.
Cas 2 : $k = n-1$
$\lambda_0 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ donc $\lambda_n P_n = 0$ donc $\lambda_n = 0$ car P_n n'est pas le polynôme nul.
Donc $H(k+1)$ est vraie.
Par principe de récurrence, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $H(k)$ est vraie.
En particulier, $H(n)$ est vraie et $\lambda_0 = ... = \lambda_n = 0$.
Donc $((X^k(1-X)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]})$ est une famille libre.
D'où $\boxed{F_0, F_1, ..., F_n \text{ sont en somme directe.}}$

Question 3

Comment montrer que n sous-espaces vectoriels F_1, F_2,...,F_n (avec $n \geqslant 3$) de E sont supplémentaires dans E ?

Remarque

Attention ! Montrer que l'intersection des sous-espaces vectoriels est égale au singleton 0 et que la somme des dimensions est égale à la dimension de E ne permet pas de résoudre ce type de question pour $n \geqslant 3$. C'est une erreur fréquente : cette méthode ne fonctionne que lorsqu'il faut montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.

Méthode 4

En montrant que tout vecteur de E s'exprime de manière unique comme somme d'un élément de F_1, d'un élément de $F_2, \ldots$ et d'un élément de F_n

RAPPEL DE COURS

Soit $n \geqslant 3$. Soit E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont supplémentaires dans E (notation $E = \oplus_{i=1}^{n} F_i$) si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists!\ (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + \ldots + x_n$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque $n \geqslant 3$, pour montrer que des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots F_n$ sont supplémentaires dans un espace vectoriel E, on prend un x quelconque dans E et on montre qu'il existe un unique x_1 dans F_1, x_2 dans F_2, ... , x_n dans F_n tels que

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Exercice 4

♠ Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = M$, et telle que

$$\begin{cases} \exists X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus\{0\},\ MX_0 = X_0 \\ \exists Y_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ MY_0 = -Y_0 \\ \exists Z_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ MZ_0 = 0 \end{cases}$$

On note :

$$A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ MX = X\}$$
$$B = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ MY = -Y\}$$
$$C = \{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\},\ MZ = 0\}$$

des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $A \oplus B \oplus C = \mathbb{R}^3$.

Corrigé

Soit $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Montrons que $\exists!\ (X, Y, Z) \in A \times B \times C,\ U = X + Y + Z$.

- **Analyse** : supposons qu'il existe $(X, Y, Z) \in A \times B \times C$ tel que $U = X + Y + Z$

Alors $MU = M(X + Y + Z) = MX + MY + MZ = X - Y$
et $M^2U = M(X - Y) = MX - MY = X + Y$

Donc $\begin{cases} X + Y + Z = U \\ X - Y = MU \\ X + Y = M^2U \end{cases}$ et ainsi $\begin{cases} X + Y + Z = U \\ 2X = MU + M^2U \\ Y = M^2U - X \end{cases}$

Alors $\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}(MU + M^2U) \\ Y \ = \ \dfrac{1}{2}(M^2U - MU) \\ Z = U - M^2U \end{cases}$ d'où l'unicité si existence.

- **Synthèse** : Posons

$X = \dfrac{1}{2}(MU + M^2U),\ Y = \dfrac{1}{2}(M^2U - MU),\ Z = U - M^2U$

(1) $X + Y + Z$ vaut

$$\frac{1}{2}(MU + M^2U) + \frac{1}{2}(M^2U - MU) + U - M^2U = U$$

$$\begin{aligned} (2)\ MX = M\left(\frac{1}{2}(MU + M^2U)\right) &= \frac{1}{2}M^2U + \frac{1}{2}M^3U \\ &= \frac{1}{2}M^2U + \frac{1}{2}MU = X \text{ car } M^3 = M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)\ MY = M\left(\frac{1}{2}(M^2U - MU)\right) &= \frac{1}{2}M^3U - \frac{1}{2}M^2U \\ &= \frac{1}{2}MU - \frac{1}{2}M^2U = -Y \end{aligned}$$

(4) $MZ = MU - M^3U = MU - MU = 0$

D'où l'existence. Ainsi
$\forall U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \exists!(X, Y, Z) \in A \times B \times C,\ U = X + Y + Z$

i.e. $\boxed{A \oplus B \oplus C = \mathbb{R}^3.}$

Méthode 5

En montrant qu'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de F_1, $\mathcal{B}_2$ de F_2,..., $\mathcal{B}_n$ de F_n et que la juxtaposition de $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ..., \mathcal{B}_n$ forme une base de E

RAPPEL DE COURS

Soit $n \geqslant 3$. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F_1, F_2, ..., F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

$F_1, F_2, ..., F_n$ sont supplémentaires dans E si et seulement si la juxtaposition d'une base de F_1, d'une base de $F_2, ...$ et d'une base de F_n est une base de E.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque $n \geqslant 3$, pour montrer que $F_1, ..., F_n$ sont supplémentaires dans un espace vectoriel E de dimension finie, on peut trouver une base de F_1, une base de $F_2, ...$ et une base de F_n et montrer que leur juxtaposition forme une base de E.

Exercice 5

Soient les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x = y \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}\right\}$$

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases}\right\}$$

Montrer que $F \oplus G \oplus \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(1,2,0,0)) = \mathbb{R}^4$.

Corrigé

- $$\begin{aligned} F &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x = y \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,2,1)) \end{aligned}$$

$(1,1,2,1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $((1,1,2,1))$ est une famille libre de F. Comme c'est une famille génératrice, c'est une base de F.

- $$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, \ \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = 2z \\ t = 0 \end{array} \right. \text{ i.e. } \begin{array}{l} x = 2z \\ y = 2z \\ t = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}((2,2,1,0))$$

$(2,2,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $((2,2,1,0))$ est une famille libre de G. Comme c'est une famille génératrice, c'est une base de G.

- $(1,1,1,0)$ et $(1,2,0,0)$ sont non colinéaires.

Donc $((1,1,2,1),(1,2,0,0))$ est une famille libre.

Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Vect}((1,1,1,0),(1,2,0,0))$.

- Montrons que :

$$\mathcal{B} = ((1,1,2,1),(2,2,1,0),(1,1,1,0),(1,2,0,0))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$a(1,1,2,1) + b(2,2,1,0) + c(1,1,1,0) + d(1,2,0,0) = 0$$

Alors $\left\{ \begin{array}{r} a + 2b + c + d = 0 \\ a + 2b + c + 2d = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$ donc $\left\{ \begin{array}{r} 2b + c + d = 0 \\ 2b + c + 2d = 0 \\ b + c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$

Donc $\left\{ \begin{array}{r} d = 0 \\ 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$ i.e. $\left\{ \begin{array}{l} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right.$

Donc $\mathcal{B}$ est libre et est composée de 4 éléments.

Or $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Donc $\boxed{F \oplus G \oplus \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(1,2,0,0)) = \mathbb{R}^4.}$

1.2. Changement de base

Question 4 **Comment déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$?**

Méthode 6 **En déterminant la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$**

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, ..., v_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

On a ainsi

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, ..., v_n)$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, on reviendra le plus souvent à la définition rappelée ci-dessus. Dans la plupart des cas, une des bases sera la base canonique de l'espace vectoriel concerné E (s'il s'agit de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{R}_n[X]$).

Exercice 6

On admet que la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$.

Corrigé

$$\mathcal{C} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$$

Notons $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

$$(1, 1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$$

$$(1, 2, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (0, 0, 1)$$

D'où $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}((1, 1, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 1))$

$$\boxed{P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 7

♠ **D'après HEC 2017**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts.
On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$

On admet que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Déterminer $L_i(x_j)$ pour $(i, j) \in ([\![0, n]\!])^2$.

2) Expliciter la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Corrigé

1) Soit $(i, j) \in ([\![0, n]\!])^2$.

• **Cas 1 :** $i = j$.

Alors $L_i(x_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} 1 = 1$

• **Cas 2 :** $i \neq j$.

Alors $L_i(x_j) = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x_j - x_j}{x_i - x_j} \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i \text{ et } k \neq j}} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k}$

Or $\dfrac{x_j - x_j}{x_i - x_j} = 0$.

Ainsi $\boxed{\forall (i, j) \in ([\![0, n]\!])^2, \ L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}}$

2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc $\exists (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i L_i$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned} P(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} a_i \underbrace{L_i(x_j)}_{=0} + a_j \underbrace{L_j(x_j)}_{=1} \\ &= a_j \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall j \in [\![0, n]\!], \ a_j = P(x_j)$

Donc $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$

Posons $P = X^k$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.

Comme $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$, on a $X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(1, X, X^2, ..., X^n)$$

D'où $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}.$

Méthode 7

En utilisant la formule sur l'inverse d'une matrice de passage

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, ..., v_n)$ deux bases de E. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont inversibles et on a :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \text{ et } P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il est parfois plus simple de déterminer la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}'$ vers une base $\mathcal{B}$ ($P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$) que de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ ($P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$). C'est notamment le cas avec la base canonique si on travaille sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, il est généralement plus simple de déterminer $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Si l'énoncé demande de déterminer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et qu'il est plus simple de déterminer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, on peut commencer par déterminer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ puis on utilise la formule sur l'inverse d'une matrice de passage pour pouvoir déterminer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Cette méthode peut être appliquée uniquement s'il est possible de déterminer l'inverse de $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et elle sera le plus souvent utilisée pour des bases à 2, 3 ou 4 éléments.

Exercice 8

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Corrigé

$$\mathcal{C} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

$$(1,-1,1) = 1.(1,0,0) - 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1)$$

$$(1,1,1) = 1.(1,0,0) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,1)$$

$$(1,0,-1) = 1.(1,0,0) + 0.(0,1,0) - 1.(0,0,1)$$

D'où $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ est inversible. Déterminons $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1}$.

Soit $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \in (\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a & \\ -x+y=b & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ x+y-z=c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y+z=a+b \\ -2z=c-a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=a \\ 2y=a+b-z \\ z=\dfrac{a-c}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=a-y-z \\ y=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a-c}{2}=\dfrac{a+2b+c}{4} \\ z=\dfrac{a-c}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=a-\dfrac{a+2b+c}{4}-\dfrac{a-c}{2}=\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4} \\ y=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4} \\ z=\dfrac{a}{2}-\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

On a donc $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.}$

Question 5 Comment déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}$?

Méthode 8 A l'aide de la méthode classique vue en première année pour déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
Soit u un vecteur de E.
Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on a :

$$\exists!(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

La matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base, on commence d'abord par déterminer les coordonnées de ce vecteur dans cette base. On utilise alors le rappel ci-dessus pour expliciter la matrice colonne.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la matrice des coordonnées de $(X+1)^n$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé

$$\mathcal{C} = (1, X, X^2, ..., X^n)$$

Par la formule du binôme de Newton, on a :

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

Ainsi la matrice des coordonnées de $(X+1)^n$ dans $\mathcal{C}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}((X+1)^n) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

Méthode 9

A l'aide de la formule de changement de base

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Soit u un vecteur de E.

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il faudra parfois penser à utiliser la formule de changement de base rappelée ci-dessus pour pouvoir déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base. Le plus souvent, l'énoncé nous incitera à utiliser cette méthode en nous demandant précédemment de déterminer une matrice de passage, ou de déterminer la matrice des coordonnées de ce même vecteur dans une autre base.

Il est important de nommer la formule de changement de base au cours de son raisonnement.

Exercice 10

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,1,1),(1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ (Démontré précédemment)}$$

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Expliciter la matrice des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Corrigé

Par la formule de changement de base, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a alors $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{x-2y+z}{4} \\ \dfrac{x+2y+z}{4} \\ \dfrac{x-z}{2} \end{pmatrix}}$.

Question 6 Comment déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$?

Méthode 10 A l'aide de la méthode classique vue en première année pour déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne ($i \in [\![1, n]\!]$) est la matrice des coordonnées du vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$.

En notant, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) &= \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode a déjà été décrite dans le livre de première année, mais revoici ses différentes étapes :

- On prend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ donnée par l'énoncé et on lui applique f, de sorte à avoir $(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$.
- On exprime les coordonnées de $f(e_1)$ dans cette même base, et on remplit la première colonne de la matrice avec ces coordonnées.
- On procède de manière similaire pour $f(e_2), ..., f(e_n)$ afin d'obtenir les autres colonnes de la matrice.

Exercice 11

D'après EM Lyon 2018

Soit $n \geqslant 2$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

Déterminer sa matrice représentative A dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé

Si $P = 1$, $P' = 0$ donc $\varphi(1) = \frac{1}{n}X(1-X)\cdot 0 + X \cdot 1 = X$

Si $P = X^n$, $P' = nX^{n-1}$ donc

$\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X \cdot X^n = X^n$

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \varphi(X^k) &= \frac{k}{n}X(1-X)X^{k-1} + XX^k \\ &= \frac{k}{n}X^k - \frac{k}{n}X^{k+1} + X^{k+1} \\ &= \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1} \end{aligned}$$

Donc la matrice de φ dans $\mathcal{C}$ est :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}}$$

Méthode 11

A l'aide de la formule de changement de base

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Attention : la formule de changement de base pour un vecteur ne nécessite qu'une seule matrice de passage alors que celle pour un endomorphisme nécessite deux matrices de passage (une à gauche et une à droite).

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il faudra parfois penser à utiliser la formule de changement de base rappelée ci-dessus pour pouvoir déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base. Le plus souvent, l'énoncé nous incitera à utiliser cette méthode en nous demandant précédemment de déterminer une matrice de passage, ou de déterminer la matrice représentative de ce même endomorphisme dans une autre base.

Il est important de nommer la formule de changement de base au cours de son raisonnement et de ne pas se tromper dans l'ordre des matrices de passage.

Exercice 12

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^2$ telles que la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ soit $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Corrigé

$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ a pour déterminant $2 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$
Donc $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est inversible et on a :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Par la formule de changement de base, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) &= P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.}$

Question 7 Comment montrer que deux matrices A et B sont semblables ?

Méthode 12 En montrant qu'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$

RAPPEL DE COURS

Deux matrices carrées A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables peuvent être interprétées comme deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il est relativement rare qu'un énoncé demande de montrer que deux matrices A et B sont semblables, mais si tel est le cas, il faut montrer le point de cours rappelé ci-dessus. On peut également montrer que ces matrices sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme dans des bases différentes. En effet, avec la formule de changement de base, cela permet d'en déduire qu'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k et B^k sont semblables.

Corrigé

A et B sont semblables donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ B = P^{-1}AP$.

Posons pour $k \in \mathbb{N}^*$, $H(k)$: "$B^k = P^{-1}A^kP$"

- $\underline{k = 1 :}$ on a bien $B = P^{-1}AP$ d'où $H(1)$.
- $\underline{\text{Soit } k \in \mathbb{N}^*.}$ Supposons $H(k)$.
  On a alors $B^k = P^{-1}A^kP$
  D'où $B^{k+1} = BB^k = P^{-1}APP^{-1}A^kP$
  Donc $B^{k+1} = P^{-1}AI_nA^kP$ car $PP^{-1} = I_n$
  Alors $B^{k+1} = P^{-1}AA^kP = P^{-1}A^{k+1}P$ d'où $H(k+1)$.

Par récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = P^{-1}A^kP$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k \text{ et } B^k \text{ sont semblables.}}$

1.3. Stabilité d'un sous-espace vectoriel

Question 8 **Comment montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme f ?**

Méthode 13 **En montrant que pour tout $x \in F$, on a $f(x) \in F$**

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$F \text{ est stable par } f \iff \forall x \in F,\ f(x) \in F \iff f(F) \subset F$$

Exercice 14

D'après ESCP 2001

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}^n$. Soit f un endomorphisme de E, $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que si $F_1, F_2, ..., F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f, alors $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est stable par f.

Corrigé

Soient $F_1, F_2, ..., F_p$ p sous-espaces vectoriels de E stables par f.

Montrons que $\forall x \in \sum_{k=1}^{p} F_k,\ f(x) \in \sum_{k=1}^{p} F_k$

Soit $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$.

On a alors : $\exists(x_1, x_2, ..., x_p) \in F_1 \times F_2 \times ... \times F_p$,

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_p$$

$$f(x) = f(x_1 + x_2 + ... + x_p) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_p)$$

car f est une application linéaire. Or :
F_1 est stable par f et $x_1 \in F_1$ donc $f(x_1) \in F_1$
F_2 est stable par f et $x_2 \in F_2$ donc $f(x_2) \in F_2$

$\vdots$

F_p est stable par f et $x_p \in F_p$ donc $f(x_p) \in F_p$
Ainsi $f(x) = \underbrace{f(x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{f(x_2)}_{\in F_2} + ... + \underbrace{f(x_p)}_{\in F_p}$

D'où $f(x) \in \sum_{k=1}^{p} F_k$. Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est stable par } f.}$

Méthode 14

En montrant la stabilité pour une base ou une famille génératrice de F.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il faut donc montrer que si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base (ou seulement une famille génératrice) de F, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) \in F$$

Exercice 15

Soit l'endomorphisme $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P) = X^2 P''$$

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(X^2, ..., X^n)$ est stable par Δ.

Corrigé

On a $\forall k \in [\![2, n]\!]$,

$$\Delta(X^k) = X^2 \cdot k(k-1)X^{k-2} = k(k-1)X^k \in F$$

Or $(X^2, ..., X^n)$ est une famille génératrice (et même une base) de F, donc $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$