J'intègre

ECG
2e année
NOUVEAU PROGRAMME

Mathématiques appliquées Informatique

QUESTIONS ET METHODES

Coordonné par Olivier Sarfati

Olivier Sarfati
Diplômé d'HEC, directeur de MyPrepa et professeur chez MyPrepa

Paul-Louis Donnard
Diplômé d'HEC et de Polytechnique, enseignant chez MyPrepa

Baptiste Frelot
Diplômé d'HEC, enseignant chez MyPrepa

Antoine Lagarde
Diplômé d'HEC et des Mines de Paris, enseignant chez MyPrepa

Florian Marty
Agrégé de mathématiques, enseignant au lycée Saliège en voie ECG

Fabio Russo
Enseignant chez MyPrepa, diplômé de l'ESSEC

DUNOD

Couverture :
- Direction artistique : Nicolas Wiel
- Conception graphique : Pierre-André Gualino et Julie Coinus

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-083741-0

Comment utiliser cet ouvrage ?

L'ouvrage que vous tenez entre les mains fait la **synthèse de 40 ans de sujets de concours** en adoptant un **parti pris original** : présenter la très **grande majorité des questions qui tombent aux concours** et les décrypter à l'aide des **méthodes les plus fréquemment mobilisées**. Les **rappels de cours systématiquement mis en avant** couvrent la totalité du programme et vous donnent l'occasion de les **apprendre « en situation ».** Ainsi, un(e) candidat(e) qui maîtrisera sur le bout des doigts tout ce qui suit ne sera pas surpris aux concours.

Pour faire une utilisation optimale de l'ouvrage et ainsi maximiser vos progrès, voici quelques **conseils précieux** que nous vous invitons vivement à respecter :

- **La maîtrise de cet ouvrage doit se faire en complément de l'apprentissage du cours de votre professeur.** Bien utilisé, il vous aidera à digérer les notions que vous aurez vues en classe.
- **Annotez le sommaire présent au début de chaque chapitre afin de cadrer au mieux vos séances de travail** : cochez les questions parfaitement maîtrisées, celles qu'il vous faudra reprendre et rajoutez un code couleur par niveau de difficulté. Les exercices difficiles sont signalés par un ♠, abordez-les une fois que vous êtes suffisamment à l'aise sur le chapitre.
- **Annotez également le cœur des différents chapitres en vous servant des marges sur le côté de chaque page** : vos notes manuscrites (par exemple code couleurs par niveau de difficulté, timing, astuce à retenir, méthodes à revoir) vous permettront de mieux suivre votre progression et ainsi optimiser vos séances de travail. En moyenne, vous devriez refaire chacune des questions 2 à 3 fois pendant votre deuxième année.
- **Forcez-vous à recopier les rappels de cours** en rouge avant de faire les exercices relatifs à une méthode : c'est comme cela que vous assimilerez le plus rapidement le cours et ses enjeux.
- Lors de vos recherches d'exercices ou de devoirs maison donnés par votre professeur, si vous butez sur une question, **utilisez la table des matières du chapitre en jeu pour aller identifier une question** qui s'en rapproche et faites toutes les méthodes et exercices proposés pour y répondre. Vous trouverez ainsi plus facilement réponse à toutes les questions qui vous seront posées dans les exercices de votre professeur de prépa.
- Avant chaque DS important ou concours blanc, **entraînez-vous sur les sujets de fin de chapitre souvent issus des concours de la BCE et ECRICOME.**
- **Ne négligez aucun chapitre, aucune question, aucune méthode** : à la fin de votre deuxième année, idéalement, tout doit être maîtrisé.

Enfin, même si cet ouvrage s'utilise comme un **dictionnaire de méthodes** et vous fera gagner beaucoup de temps et de points aux concours, il n'est pas un livre de recettes : il ne vous exonère pas de **réfléchir** et de **profondément comprendre les concepts et objets mathématiques** que vous manipulerez et que vous aurez vus avec votre professeur de prépa.

En espérant que vous prendrez autant de plaisir à naviguer dans l'ouvrage que nous en avons pris à le concevoir et le rédiger.

Bonne continuation.

Les auteurs

Sommaire

Partie I. Algèbre

Partie II. Analyse

Partie III. Probabilités

Partie IV. Informatique

Partie I

Algèbre

Chapitre 1
Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel est certes très abstraite, mais essentielle pour le calcul. Ces ensembles sont en effet stables, ce qui permet d'effectuer des combinaisons linéaires avec ses éléments sans risquer d'en sortir. Le chapitre généralise quelques propriétés vues en première année avec les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Vous verrez qu'il existe en réalité de multiples espaces vectoriels, notamment $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'ensemble des suites réelles. Ce sont les fondements théoriques sur lesquels se base le programme de deuxième année.

DANS CE CHAPITRE

14 questions classiques
37 méthodes
44 exercices

Sommaire

1.1. Sous-espaces vectoriels

Question 1 **Comment montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?**

Méthode 1 **En montrant les 3 points définissant un sous-espace vectoriel**

RAPPEL DE COURS

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $I (I \subset \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$) sont des espaces vectoriels.
- F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

  1) F est inclus dans E.
  2) $0_E \in F$ i.e. F est non vide.
  3) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (u, v) \in F^2,\ (\alpha u + v) \in F$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode sera le plus souvent utilisée pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. C'est un classique. On remarque que pour montrer que F est non vide (ie contient au moins un vecteur), on montre que le vecteur nul de E appartient à F. Le vecteur nul étant bien un vecteur, un ensemble qui le contient n'est pas vide.

Exercice 1

Exemple d'application simple
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0 \text{ et } z = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

- $F \subset E$ par définition de F
- $(0, 0, 0) \in F$ car $0 + 0 = 0$ et $0 = 0$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $((x, y, z), (x', y', z')) \in (F)^2$.

On a : $\alpha(x, y, z) + (x', y', z') = (\alpha x, -\alpha x, 0) + (x', -x', 0) = (\alpha x + x', -\alpha x - x', 0)$

Comme $(\alpha x + x') + (-\alpha x - x') = 0$ et $0 = 0$,
$\alpha(x, y, z) + (x', y', z') \in F$.

Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Exercice 2

D'après ESSEC 2015

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit q une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par :

$$F(q) = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ \forall t \in [0,1],\ f''(t) = q(t)f(t)\}$$

Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Corrigé

- $F(q) \subset E$
- Soit $f = 0_E$ $\forall t \in [0,1], f''(t) = 0 = q(t)f(t)$

Donc $f \in F(q)$ et $F(q) \neq \varnothing$.

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in (F(q))^2$. On pose $h = \alpha f + g$.

$$\text{On a : } \forall t \in [0,1],\ \begin{aligned} h''(t) &= \alpha f''(t) + g''(t) \\ &= \alpha q(t)f(t) + q(t)g(t) \\ &= q(t)(\alpha f + g)(t) \\ &= q(t)h(t) \end{aligned}$$

D'où $\forall t \in [0,1], h''(t) = q(t)h(t)$

Donc $h \in F(q)$ i.e. $\alpha f + g \in F(q)$.

Ainsi $\boxed{F(q) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Méthode 2

En montrant que $F = \mathrm{Vect}(U)$ où U est une famille de vecteurs de E

RAPPEL DE COURS

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_p) \in E^p$.

On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ et on note $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$.

On a : $\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$

$\mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on peut chercher à exprimer F sous forme d'un Vect() d'éléments de E. L'interêt de cette méthode est de pouvoir ensuite facilement trouver une base.

Exercice 3

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y, z = 0\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 2y, z = 0\} \\ & = & \{(2y, y, 0), y \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{y(2, 1, 0), y \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \mathrm{Vect}(2, 1, 0) \end{array}$$

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

Exercice 4

Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Corrigé

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{P \in \mathbb{R}_4[X]\ /\ P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ & = & \{(X-1)X(X+1)(aX+b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{(X^3 - X)(aX+b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{a(X^4 - X^2) + b(X^3 - X),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}(X^4 - X^2, X^3 - X) \end{array}$$

Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X]}$

Question 2 Comment montrer qu'un espace F n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?

Méthode 3 En montrant qu'un des 3 points définissant un sous-espace vectoriel n'est pas vérifié

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie F de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut :

- Montrer que 0_E n'appartient pas à F.
- Trouver $\lambda \in \mathbb{R},\ u \in F$ tel que λu n'appartient pas à F.
- Trouver $u, v \in F$ tel que $u + v$ n'appartient pas à F.

Exercice 5

Montrer que $E = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Corrigé

$(0,0) \notin E$ donc $\boxed{E \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$

Exercice 6

♠ **D'après ESCP 2004**

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ie les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dite adaptée à f, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx)$$

1) Montrer que les fonctions constantes appartiennent à E.

2) Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \dfrac{1}{2}$. établir que A est un élément de E.

3) E constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Corrigé

1) Soit f une fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} c \\
&= n \times c \\
&= n \times f(nx)
\end{aligned}$$

Donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = n$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n \times f(nx)$$

Donc $f \in E$.

Donc $\boxed{\text{les fonctions constantes appartiennent à } E.}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} A\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\\
&= nx-\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2}\\
&= nx-\frac{1}{2}\\
&= 1\times A(nx)
\end{aligned}$$

Donc en posant $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ s_n=1$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} A\left(x+\frac{x}{n}\right)=s_n\times A(nx)$$

Donc $\boxed{A\in E}$

3) Notons $B : x\mapsto \dfrac{1}{2}$. Supposons que $A+B\in E$. Il vient que $A+B : x\mapsto -x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$ ie $A+B : x\mapsto x$.

Alors il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}\right)=s_n\times nx$$

En particulier, pour $x=0$:

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n-1}\left(0+\frac{k}{n}\right) &= s_n\times n\times 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k=0$ i.e. $\dfrac{1}{n}\times\dfrac{(n-1)\times n}{2}=0$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n-1=0$. On a une contradiction.

Donc $A+B\notin E$, or $A\in E$ et $B\in E$.

Ainsi $\boxed{E \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}\in(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$

Question 3 Comment montrer une égalité d'espaces vectoriels ?

Méthode 4 Par double inclusion

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit d'une méthode à utiliser principalement lorsque les espaces sont définis de manière abstraite et non totalement explicite, ou bien quand on n'est pas en dimension finie. On utilisera alors les méthodes classiques pour montrer une double inclusion.

Exercice 7

Soit $n \geqslant 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathbb{R}[A]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ (par exemple : $A^3 + 4A \in \mathbb{R}[A]$).

Z désigne un polynôme annulateur non nul de A et de degré minimal, (on note d le degré de $\mathbb{Z}$).

1) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P = ZQ + R$ et $\deg(R) < d$.
2) En déduire que $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$.

Corrigé

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne :

$\boxed{\text{Il existe un unique couple de polynôme } (Q, R) \text{ tel que } P = ZQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(Z) = d.}$

2) • Comme $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices $I_n = A^0, A, ..., A^{d-1}$, on a :

$$\text{Vect}(I_n, A, ..., A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A]$$

• Réciproquement, soit $P(A) \in \mathbb{R}[A]$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = ZQ + R$ avec $\deg(R) < d$.

On a alors : $P(A) = Z(A)Q(A) + R(A) = R(A)$

Donc $P(A) = R(A)$ car $Z(A) = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$.

De plus, $\deg(R) < d$, donc $R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$.

On a donc : $P(A) \in \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$

Donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{Vect}(I_n, A_1, ..., A^{d-1})$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{d-1}).}$

Méthode 5

Par inclusion et égalité de dimensions

RAPPEL DE COURS

Soient A et B des espaces vectoriels de dimension finie.

Si $A \subset B$ et $\dim(A) = \dim(B)$ alors $A = B$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est très fréquemment utilisée lorsqu'on a déjà démontré (ou alors qu'on est capable de le faire facilement) que les dimensions des deux espaces sont égales. Il suffit alors de montrer la plus simple des deux inclusions.

Exercice 8

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$u = (1, -1, 1),\ v = (0, -1, 2),\ w = (1, -2, 3)$

Soient $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}(u, v, w)$

On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $F = G$.

Corrigé

- On remarque que $u + v = w$.

$$\begin{aligned} \text{On a } F &= \text{Vect}(u, v, w) \\ &= \text{Vect}(u, v, u + v) \\ &= \text{Vect}(u, v) \end{aligned}$$

Or u et v ne sont pas colinéaires donc : (u, v) est une base de F et $\dim(F) = 2$.

- $$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -2y - z\} \\ &= \{(-2y - z, y, z)\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

Or $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de G.

D'où $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de G, donc $\dim(G) = 2$

RAPPEL DE COURS

Si $(e_1, ..., e_r)$ est une base de F alors :

$$F \subset G \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ e_i \in G$$

$F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et (u, v) est une base de F.

Or $\begin{cases} 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0 \text{ donc } u \in G \\ 0 + 2 \times (-1) + 2 = 0 \text{ donc } v \in G \end{cases}$

Ainsi $F \subset G$.

Comme $\dim(F) = \dim(G) = 2$ et $F \subset G$, on a $\boxed{F = G.}$

1.2. Familles libres, génératrices et bases

Question 4 **Comment montrer qu'une famille U est libre ?**

Méthode 6 **Si U comprend un unique élément u, en montrant que $u \neq 0$**

RAPPEL DE COURS

Si U est une famille à 1 élément et que cet élément est non nul, alors U est libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 1, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice 9

Justifier que la famille ((2,5)) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$

Corrigé

$(2, 5) \neq (0, 0)$ donc $\boxed{\text{((2,5)) est une famille libre de } \mathbb{R}^2.}$

Remarque

De l'importance des parenthèses : $((2, 5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ comportant un élément tandis que $(2, 5)$ est une famille liée de $\mathbb{R}$ comportant deux éléments.

Méthode 7 **Si U est une famille à 2 élements u et v, en montrant que u et v sont non colinéaires**

RAPPEL DE COURS

Soit $U = (u, v)$ une famille à deux éléments.

u et v sont non colinéaires $\Longleftrightarrow$ U est libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 2, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice 10

Justifier que la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre.

Corrigé

$(1,2,3)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires.

Donc $\boxed{\text{la famille } ((1,2,3),(0,1,1)) \text{ est libre.}}$

Méthode 8

En utilisant la définition d'une famille libre

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_p) \in E^p$.

$(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille libre si et seulement si $\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p = 0_E \implies \alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Revenir à cette méthode doit vraiment être une constante dans votre raisonnement lorsque la famille comporte 3 éléments ou plus. On revient à la définition de la liberté et on cherche à montrer l'implication rappelée ci-dessus pour conclure sur la liberté de la famille.

Exercice 11

Soit $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,0)$ et $w = (1,1,0)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (u,v,w) est une famille libre.

Corrigé

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\ u + b\ v + c\ w = 0$

Alors $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b+c=0 \\ 2b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{(u,v,w) \text{ est une famille libre.}}$

Méthode 9

S'il s'agit de polynômes, en montrant que c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré

RAPPEL DE COURS

Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est une famille libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de polynômes non nuls, le réflexe doit être de vérifier si cette famille de polynômes est échelonnée en degré. Si c'est le cas, il est important de préciser qu'ils sont tous non nuls.

Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser la méthode précédente.

Exercice 12

D'après HEC 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$x^{<k>} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(x+i-1) & \text{si} \quad k \geqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{<k>}$, les polynômes $X^{<k>}$ de $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que $(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>})$ est une famille libre.

Corrigé

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \deg(X^{<k>}) = \deg\left(\prod_{i=1}^{k}(X+i-1)\right) = k$$

De plus, $\deg(X^{<0>}) = 0$ car $X^{<0>} = 1$.

Ainsi, la famille $(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>})$ forme une famille de $(n+1)$ polynômes non nuls échelonnée en degrés.

Donc $\boxed{(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>}) \text{ est une famille libre.}}$

Méthode 10

En utilisant le lien entre application injective et familles libres

Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.

RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f injective $\Longleftrightarrow$ $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$ est libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus pour montrer qu'une famille est libre lorsque l'on peut exploiter une application linéaire f injective.

Exercice 13

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n^2$.
Soit $(M_1, ..., M_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $({}^tM_1, ..., {}^tM_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé

Notons f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe ${}^tM$. D'après le cours, f est linéaire.
De plus, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = 0$.
Alors ${}^tM = 0$ donc $M = 0$.
Donc $\text{Ker}(f) \subset \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Comme $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \text{Ker}(f)$, on a :
$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et donc f est injective.
Or $(M_1, ..., M_p)$ est libre. Donc $(f(M_1), ..., f(M_p))$ est libre.
Donc $\boxed{({}^tM_1, ..., {}^tM_p) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

Question 5 Comment montrer qu'une famille U est liée ?

Méthode 11 En montrant que la famille comporte le vecteur nul

RAPPEL DE COURS

Si une famille comporte le vecteur nul alors c'est une famille liée, i.e. non libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à identifier un vecteur nul alors on peut être assuré que toute famille contenant ce vecteur est liée.

Exercice 14

Soit f une fonction continue et positive sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Montrer que $(x \mapsto x,\ x \mapsto e^x + 1,\ f)$ est une famille liée de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.

Corrigé

f est continue et à valeurs positives sur $[0,1]$.

Comme, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$, par théorème $\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$

Donc $\boxed{(x \mapsto x,\ x \mapsto e^x + 1,\ f) \text{ est une famille liée.}}$

Méthode 12

Si U est une famille à 2 éléments u et v, en montrant que u et v sont colinéaires

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque la famille est de cardinal 2, il suffit de montrer que les vecteurs sont colinéaires pour justifier qu'elle est liée.

Exercice 15

Justifier que la famille $((1,2,3),(4,8,12))$ est liée.

Corrigé

$(4,8,12) = 4(1,2,3)$ donc $\boxed{\text{la famille est liée.}}$

Méthode 13

En montrant qu'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres

RAPPEL DE COURS

Une famille à deux éléments ou plus est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à exprimer un des vecteurs d'une famille comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille alors cette famille est liée.

Exercice 16

Montrer que la famille $(X, 2X-5, 5X-5)$ est liée.

Corrigé

On a : $5X-5 = 2X-5+3\times X$

Donc $\boxed{(X, 2X-5, 5X-5) \text{ est une famille liée de } \mathbb{R}[X].}$

Méthode 14

En montrant que la famille comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel auquel ils appartiennent

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille d'éléments de E.
Si $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la famille d'un espace vectoriel E de dimension finie comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de E, alors on peut conclure que la famille est liée.

Exercice 17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(A^k)_{k\in[\![0,n^2]\!]}$ est liée.

Corrigé

$(A^k)_{k\in[\![0,n^2]\!]}$ est une famille de n^2+1 vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < n^2+1$, cette famille n'est pas libre, i.e.

$\boxed{(A^k)_{k\in[\![0,n^2]\!]} \text{ est une famille liée.}}$

Question 6 Comment montrer qu'une famille U est génératrice d'un espace vectoriel ?

Méthode 15 En utilisant la définition d'une famille génératrice

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ d'éléments de E est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

Si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$, alors $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille génératrice de E.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que U est une famille génératrice de E, on prend un x quelconque dans E et on cherche à l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Si on a montré précédemment que E est égal à $\text{Vect}(U)$, on peut directement conclure que U est génératrice de E.

Exercice 18

Soit $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^2 + X$. (P_1, P_2, P_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Corrigé

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $\exists!(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$

Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} P &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 \\ &= \alpha(X^2 + 2X + 1) + \beta(X^2 + X + 1) + \gamma(X^2 + X) \\ &= \alpha X^2 + 2\alpha X + \alpha + \beta X^2 + \beta X + \beta + \gamma X^2 + \gamma X \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on a alors :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ a_2 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ -a_1 + 2\alpha + \beta + \gamma + a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ \alpha = a_1 - a_2 \\ \gamma = a_2 - \alpha - \beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta &= a_0 - a_1 + a_2 \\ \alpha &= a_1 - a_2 \\ \gamma &= -a_0 + a_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

D'où, $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_2[X].}$

Méthode 16

En utilisant le lien entre application surjective et famille génératrice

Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.

RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille génératrice de E.

f surjective $\iff (f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$ est génératrice de F

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus lorsque l'on connaît une famille génératrice et qu'on peut faire entrer en jeu une application surjective pour transformer cette famille en une autre famille génératrice.

Exercice 19

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \geqslant p$. Soit $(P_1, ..., P_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $(P'_1, ..., P'_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Corrigé

Notons f l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui à P associe $f(P) = P'$.

f est linéaire par linéarité de la dérivation.

Soit $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Notons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.

Posons alors $P = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{k-1}}{k} X^k$

$$\begin{aligned}
\text{On a } f(P) &= P' \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{a_{k-1}}{k} \times kX^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} a_{k-1} X^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \\
&= Q
\end{aligned}$$

Donc Q admet un antécédent par f.
Donc f est une application linéaire surjective.
Or $(P_1, ..., P_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_p[X]$.
Donc $(f(P_1), ..., f(P_n))$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Ainsi $\boxed{(P'_1, ..., P'_n) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_{p-1}[X].}$

Méthode 17 **Par opérations sur le Vect()**

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$P_k = X^k + X^n \in \mathbb{R}_n[X]$$

Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Corrigé

On a :

$$\begin{aligned}
\text{Vect}\,(P_0, ..., P_n) &= \text{Vect}\left(1 + X^n, ..., X^{n-1} + X^n, 2X^n\right) \\
&= \text{Vect}\left(1, X, ..., X^{n-1}, X^n\right) \\
&\text{en soustrayant par } X^n \text{ partout, qui est} \\
&\text{généré par la famille } (P_0, ..., P_n) \\
&= R_n[X]
\end{aligned}$$

Or on sait que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.
Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$\boxed{(P_0, ..., P_n) \text{ est génératrice de } \mathbb{R}_k[X].}$

Question 7

Comment montrer qu'une famille U n'est pas génératrice d'un espace vectoriel E ?

Méthode 18

En trouvant un vecteur de E qui ne puisse pas être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il faut trouver un contre-exemple à la définition d'une famille génératrice, c'est-à-dire un vecteur de l'espace vectoriel qui ne puisse être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

La méthode du contre-exemple doit toujours être rapide : si on ne trouve pas de contre-exemple rapidement, il faut changer de méthode.

Exercice 21

$U = ((1,1,0),(2,1,0),(3,4,0))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Corrigé

Il est clair que $(0,0,1) \notin \mathrm{Vect}(U)$ donc

$\boxed{\text{U n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

Exercice 22

$((2,1),(6,3))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

Cherchons $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(4,3) = \alpha(2,1) + \beta(6,3)$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha + 6\beta \\ 3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - 3\beta \\ 4 = 6 - 6\beta + 6\beta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - 3\beta \\ 4 = 6 \end{cases} \quad \text{On a une contradiction.}$$

$(4,3)$ ne peut donc pas s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

D'où $\boxed{((2,1),(6,3)) \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^2.}$

Astuce

Quand l'énoncé pose une question, la réponse est généralement "non".

Méthode 19

En montrant que la famille a un nombre d'éléments strictement inférieur à la dimension de l'espace vectoriel

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille d'éléments de E.

Si $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est génératrice de E, alors $p \geqslant n$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la famille d'un espace vectoriel E comprend un nombre d'éléments strictement inférieur à la dimension de E, alors on peut conclure que la famille n'est pas génératrice de E.

Exercice 23

Justifier que $U = ((1,1,1),(1,2,3))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

U est une famille à 2 éléments de $\mathbb{R}^3$, or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Donc $\boxed{U \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

Question 8

Comment montrer qu'une famille U est une base d'un espace vectoriel E ?

RAPPEL DE COURS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$ la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ avec pour $i \in [\![1,n]\!]$, e_i est un vecteur ligne dont tous les coefficients valent 0 sauf le $i^{ème}$ coefficient qui vaut 1.

On appelle base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$.

On appelle base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant i\leqslant n}}$, où $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont le coefficient à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne vaut 1, les autres valent 0.