

Thierry Gourieux

Dynamique de Lagrange et de Hamilton

Licence
Master

jusqu'au théorème de Noether

Cours de mécanique analytique
de la Licence (L2) au Master



TABLE DES MATIÈRES

1. PROBLÈMES À N CORPS	13
1. Problèmes à N corps. Intégrales premières.....	13
2. Le problème à N corps de la dynamique newtonienne.....	16
3. Centre de masse.....	17
4. Forces extérieures et forces intérieures.....	17
5. Théorème du mouvement du centre de masse.....	18
6. Conservation de la quantité de mouvement totale du système.....	19
7. Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels.....	19
8. Conservation du moment cinétique total.....	22
9. Énergie cinétique et travail.....	22
10. Gradient, énergie potentielle et fonction de force.....	24
11. Théorème de l'énergie mécanique.....	25
12. Intégrales premières pour le problème à N corps isolés.....	26
13. Problèmes à un corps.....	26
14. Le problème à deux corps.....	29
15. Coordonnées de Jacobi.....	31
16. Théorème du viriel.....	33
2. PARAMÉTRISATION DES PROBLÈMES À N CORPS	39
17. Repérage primaire du système. Liaisons et degrés de liberté.....	39
18. Quelques exemples.....	41
19. Un mot sur les forces de liaison.....	44
20. Coordonnées généralisées.....	45
21. Espace de configuration du système.....	47
22. Des coordonnées primaires aux coordonnées généralisées.....	48
23. Notations vectorielles et matricielles.....	51
24. Premiers résultats mathématiques.....	53
25. Autres propriétés.....	55
3. ÉQUATIONS DE LAGRANGE DE PREMIÈRE ESPÈCE	57
26. Égalité de Lagrange.....	57
27. Forces généralisées. Équations de Lagrange de première espèce.....	58
28. Équivalence entre les équations de Newton et les équations de Lagrange....	58
29. Le pendule sphérique et les équations de Lagrange de première espèce	60
30. Haltère en chute libre.....	62
31. Roue sur un plan incliné.....	66

4. ÉQUATIONS DE LAGRANGE DE SECONDE ESPÈCE	73
32. Équations de Lagrange de seconde espèce. Lagrangien.....	73
33. Extension des équations de Lagrange aux forces dépendant des vitesses....	74
34. Extension non standard des équations de Lagrange.....	76
35. Jauge lagrangienne.....	77
36. Particule en présence d'un potentiel central.....	79
37. Lagrangien d'une particule plongée dans un champ électromagnétique.....	90
38. Lagrangien en référentiel non galiléen.....	92
39. Variables cycliques et intégrales premières. Énergie mécanique.....	95
40. Exemples.....	98
5. PETITS MOUVEMENTS AU VOISINAGE D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE	99
41. Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.....	99
42. Oscillations linéaires de la molécule CO_2	102
43. Expérience de Cavendish (1798).....	106
44. Le pendule sphérique.....	111
6. ÉNERGIE CINÉTIQUE ET TRAVAIL EN COORDONNÉES GENERALISÉES	119
45. Énergie cinétique en coordonnées généralisées.....	119
46. Travail des forces en coordonnées généralisées	123
47. Théorème de l'énergie cinétique.....	124
48. Théorème de l'énergie mécanique.....	126
49. Interprétation de la fonction énergétique $\mathcal{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$	130
7. DYNAMIQUE HAMILTONIENNE	133
50. Moments conjugués.....	133
51. La transformation de Legendre.....	135
52. Hamiltonien.....	137
53. Écriture et interprétation du hamiltonien	140
54. Équations du mouvement et variables cycliques.....	144
55. L'oscillateur harmonique dans le formalisme hamiltonien.....	145
56. Particule plongée dans un champ électromagnétique constant.....	148
8. ESPACE DES PHASES – ESPACE DES ÉTATS	153
57. Espace des phases. Espace des états.....	153
58. Représentation graphique des trajectoires.....	153
59. Flot hamiltonien.....	155
60. Un flot hamiltonien est à flux conservatif.....	157
61. Hypersurfaces iso-hamiltoniennes.....	158
62. Théorème de Liouville.....	160

63. Portraits de phase pour un seul degré de liberté.....	161
64. Portraits de phase pour deux degrés de liberté.....	169
65. Portraits de phase pour n_ρ degrés de liberté. Problème de Kepler.....	172
66. Conclusion et perspectives.....	179
9. STATIQUE : PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS	181
67. Introduction.....	181
68. Déplacements et travaux élémentaires réels ou virtuels	182
69. Différentielles et déplacements virtuels.....	183
70. Théorème générique du principe des travaux virtuels de la statique.....	185
71. Décomposition des forces.....	187
72. Principe des travaux virtuels.....	189
73. Deux exemples simples de statique.....	190
74. Principe de stationnarité de l'énergie potentielle.....	193
10. DYNAMIQUE : PRINCIPE DE D'ALEMBERT	195
75. Principe de D'Alembert.....	195
76. Le principe de D'Alembert en coordonnées généralisées : équations de Lagrange de première espèce.....	196
77. Exemple : fonctionnement de la machine d'Atwood	199
78. Multiplicateurs de Lagrange.....	201
79. Equations de Lagrange avec multiplicateurs.....	203
80. Le double pendule plan.....	206
81. Compléments succincts sur les liaisons.....	210
82. Vitesses et puissances virtuelles.....	211
11. PRINCIPE DE HAMILTON	213
83. Rendre une intégrale stationnaire.....	213
84. Aspects historiques : les principes de Héron et de Fermat en optique géométrique.....	215
85. Calcul variationnel. Équation d'Euler.....	219
86. La brachistochrone.....	221
87. Principe de Hamilton. Intégrale d'action	223
88. Forme canonique de l'intégrale d'action.....	224
89. Du principe de D'Alembert au principe de Hamilton.....	225
90. Le principe de Hamilton avec liaisons.....	228
12. TRANSFORMATIONS CANONIQUES	231
91. Transformations canoniques et espace des phases.....	231
92. Jauge lagrangienne et principe de Hamilton.....	232

93. Transformations canoniques et fonctions génératrices.....	233
94. Relations caractéristiques d'une transformation canonique.....	236
95. Exemples de transformations canoniques.....	241
96. Transformations canoniques et géométrie symplectique.....	247
97. Deux problèmes clefs.....	251
98. Transformations canoniques infinitésimales (TCI).....	252
13. CROCHETS DE POISSON	257
99. Crochets de Poisson.....	257
100. Crochets de Poisson et transformations canoniques.....	258
101. Propriétés algébriques des crochets de Poisson.....	261
102. Crochets de Poisson fondamentaux. Moment cinétique généralisé.....	262
103. Dynamique et crochets de Poisson.....	263
104. Intégrales premières.....	264
105. Recherche d'intégrales premières, méthode des caractéristiques	266
106. Détermination des intégrales premières.....	270
107. Théorème d'intégrabilité de Liouville.....	274
108. Invariance du hamiltonien par une TCI et intégrales premières.....	278
109. Crochets de Poisson et mécanique quantique.....	279
14. THÉORIE DE HAMILTON - JACOBI	281
110. Exemple de l'oscillateur harmonique.....	281
111. Équation de Hamilton - Jacobi.....	283
112. Equation de Hamilton - Jacobi pour une fonction génératrice de type F_2 ..	285
113. Interprétation de la fonction génératrice S	288
114. Exemples.....	289
115. Surfaces équiaction des systèmes conservatifs.....	295
116. Analogie optico-mécanique.....	298
117. La mécanique ondulatoire.....	301
118. Phase de la fonction d'onde et courant de probabilité.....	302
119. Principe de Jacobi.....	303
15. VARIABLES ANGLES-ACTIONS	307
120. Variables angles-actions pour un seul degré de liberté.....	307
121. Variables angles-actions pour n degrés de liberté.....	312
122. Détermination des fréquences.....	316
123. Théorie canonique des perturbations.....	321
124. L'oscillateur harmonique vu comme une perturbation.....	322
125. Utilisation des variables angles-actions dans le calcul perturbatif canonique.....	326

126. Théorème KAM.....	330
127. Systèmes adiabatiques, évolution adiabatique.....	331
128. La variable action en tant qu'invariant adiabatique.....	334
129. Exemple : le pendule plan.....	338
130. Invariants adiabatiques pour n degrés de liberté.....	340
16. SYMÉTRIES CONTINUES	343
131. Symétries. Symétries discrètes et symétries continues.....	343
132. Transformations ponctuelles finies à un paramètre.....	344
133. Transformations ponctuelles infinitésimales des coordonnées.....	347
134. Propriété et notation d'une transformation infinitésimale.....	348
135. Invariants de la transformation ponctuelle.....	353
136. Changement de variables : forme canonique d'une transformation infinitésimale.....	355
137. Transformation infinitésimales ponctuelles à plusieurs paramètres.....	360
138. Translations spatiales.....	361
139. Rotations spatiales.....	362
140. Transformation des vitesses.....	363
141. Transformations infinitésimales dépendantes des vitesses.....	364
142. Liens avec la notation variationnelle.....	365
17. THÉORÈME DE NOETHER	369
143. Effet d'une transformation infinitésimale sur le lagrangien : invariance par translation spatiale.....	370
144. Effet d'une transformation infinitésimale sur le lagrangien : invariance par rotation spatiale.....	372
145. Effet d'une transformation infinitésimale sur l'intégrale d'action.....	374
146. Deux expressions du terme résiduel Δ	376
147. Invariance de l'intégrale d'action.....	376
148. Théorème de Noether.....	378
149. Réciproque du théorème de Noether.....	379
150. Unicité des symétries de Noether ?.....	383
151. Théorème de Noether pour deux lagrangiens reliés entre eux par une jauge lagrangienne.....	385
152. Symétries de Noether ponctuelles et lagrangien.....	387
153. Théorème de Noether en formalisme hamiltonien.....	389
18. RECHERCHE DES SYMÉTRIES DE NOETHER	395
154. Les symétries ponctuelles de Noether pour l'oscillateur harmonique à une dimension.....	396

155. L'équation RT pour un degré de liberté.....	400
156. L'équation RT pour trois degrés de liberté.....	401
157. La particule libre.....	405
158. Groupe de Galilée.....	407
159. Potentiel central et problème de Kepler.....	411
160. Généralités sur l'identité de Rund-Trautman.....	413
161. Équation RT pour les symétries dépendantes des vitesses.....	417
162. Symétrie(s) associée(s) au vecteur de Runge-Lenz.....	418
19. INTÉGRALES PREMIÈRES DU PROBLÈME À N CORPS	423
163. N corps soumis à une énergie potentielle V quelconque.....	423
164. N particules libres.....	426
165. N particules en interaction de paires. Notations.....	433
166. Application aux problèmes à deux corps.....	435
167. Problèmes à N corps.....	440
168. N corps en interaction sous l'effet d'un potentiel de paires central.....	443
169. Solution générale pour le problème à deux corps.....	445
170. Intégrabilité du problème à N corps. Théorème de Bruns	447

ANNEXES

1. MATRICES	453
A1. Définitions.....	453
A2. Opérations et structures.....	453
A3. Matrices carrées et applications linéaires.....	454
A4. Matrice inverse. Déterminant.....	456
A5. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice. Éléments invariants d'une matrice par changement de base.....	457
2. MOMENTS CONJUGUÉS EN TANT QUE MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE	461
A6. Rappel de la problématique.....	461
A7. Passage à $2n$ variables indépendantes \mathbf{q} et $\mathbf{w} \doteq \dot{\mathbf{q}}$	462
A8. Transformation de Legendre.....	463
A9. Équations de Hamilton. Définition des moments conjugués.....	463
A10. Simplification du processus.....	464

BIBLIOGRAPHIE	467
----------------------	------------

INDEX	471
--------------	------------