Thierry Gourieux

# Dynamique de Lagrange et de Hamilton

Licence
Master

## jusqu'au théorème de Noether

Cours de mécanique analytique
de la Licence (L2) au Master

ellipses

CHAPITRE 1

# PROBLÈMES À $N$ CORPS

*Intégrales premières. Principaux théorèmes de la dynamique newtonienne. Fonction de force. Potentiel effectif. Problème de Kepler. Coordonnées de Jacobi. Théorème du viriel.*

Dans ce chapitre premier, il s'agit d'abord de préciser le type de systèmes dynamiques qui vont être étudiés. Pour le dire rapidement, ce sont les systèmes dont le nombre de variables inconnues à déterminer en fonction du temps est un nombre entier naturel.

Puis, sont passés en revue les principaux théorèmes que la dynamique de Newton sait énoncer pour un tel système dont l'archétype est un ensemble de $N$ points matériels en mouvement. Ces théorèmes mènent tous à l'identification de quantités qui restent constantes au cours du temps selon certaines conditions. Ces *intégrales premières*, comme on les dénomme, sont de grande importance pour résoudre le problème du mouvement de ces $N$ points matériels et on en donne de suite une définition.

En guise d'exemples, on rappelle comment le théorème de l'énergie mécanique offre une solution semi-quantitative aux problèmes unidimensionnels à un seul corps, solution qui s'étend en dimension 3 au cas des forces centrales en raison de l'existence de l'intégrale première qu'est le moment cinétique du point matériel. Vient ensuite une esquisse de la solution du *problème de Kepler*, où deux corps célestes sont en interaction gravitationnelle.

Après quoi, on envisage, pour tout problème à $N$ corps isolés du reste de l'univers, une transformation des variables (*coordonnées de Jacobi*) qui permet de mettre à profit l'intégrale première vectorielle qu'est la quantité de mouvement d'un tel système.

Le chapitre se termine par l'énoncé du *théorème du viriel* dont l'utilisation fructueuse, ne serait-ce qu'en astrophysique, justifie sa présentation.

**1. Problèmes à $N$ corps. Intégrales premières.** Il est possible de séparer les systèmes dynamiques dont on souhaite étudier le mouvement en deux grandes classes : ceux que l'on modélise à l'aide d'un ensemble dénombrable de variables et ceux que l'on modélise à l'aide d'un ensemble continu de variables. Ainsi, l'ensemble des positions vibratoires d'une corde vibrante constitue un ensemble continu de variables si la corde est traitée comme un objet matériel continu. Le traitement d'un tel ensemble de variables réclame des techniques mathématiques qui leur sont adaptées. Ce faisant, on y retrouve les notions de lagrangien – sous forme de densité lagrangienne – et des équations de Euler-Lagrange semblables à celles que nous allons rencontrer, pour ne citer que ces similitudes ; mais nous sortons là du cadre fixé par le présent ouvrage qui ne se consacre qu'aux problèmes dynamiques modélisés de telle sorte que les inconnues à déterminer en fonction du temps forment un ensemble dénombrable.

Tel est le cas, *a priori*, d'un système dynamique modélisable par une assemblée de $N$ points matériels en interaction les uns avec les autres et avec l'extérieur. Nous dirons alors que la recherche des mouvements possibles de chacun de ces points matériels – les interactions étant données – constitue un *problème à $N$ corps*.
L'un des problèmes à $N$ corps les plus connus est celui des astronomes où $N$ corps célestes sont en interaction gravitationnelle traitée selon la théorie de Newton. Dans ce problème, le champ gravitationnel newtonien éprouvé par chacun des corps célestes est donné en fonction des positions des autres corps. Il en résulte que les seules inconnues sont ces positions que l'on souhaite obtenir en fonction du temps. C'est typiquement ce genre de situation qui va nous préoccuper : trouver les positions des $N$ corps en fonction du temps, étant données les forces qui agissent sur chacun de ces corps, leurs positions et vitesses initiales étant données elles aussi.

Cependant, tous les problèmes à $N$ corps ne relèvent pas forcément du même traitement. Pour ceux qui vont nous intéresser, la mécanique classique énonce entre autres que si les seules forces en présence sont celles que les $N$ corps exercent entre eux (comme pour le problème des astronomes), alors leur quantité de mouvement totale reste constante au cours du temps (section **6**). Or, au début du XX^e^ siècle, la physique a rencontré un autre type de problème à $N$ corps pour lequel ce théorème est mis en défaut. Quand on considère $N$ particules chargées qui sont cette fois en interaction électromagnétique[1], les champs électrique et magnétique qui sont engendrés par l'ensemble de ces particules sont donnés par les équations de Maxwell qui régissent les phénomènes électromagnétiques, et chaque particule évolue sous l'effet de la force de Lorentz[2]. Dans ces conditions, on a pu montrer (par exemple, Poincaré vers 1900) que la quantité de mouvement totale de ces particules n'est pas constante et qu'en conséquence le principe des actions réciproques – la troisième loi de Newton – n'est pas vérifié[3]. Il se trouve en effet que les charges accélérées émettent un rayonnement électromagnétique et qu'une analyse approfondie montre

---

[1] La solution la plus exacte d'un tel problème nécessitera de marier les deux théories quantique et relativiste.

[2] Cette force s'écrit : $\vec{F} = Q\,\vec{E} + Q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$, où $Q$ est la charge de la particule, $\vec{v}$ sa vitesse, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ les champs électrique et magnétique au sein desquels elle évolue.

[3] En dynamique classique, il y a équivalence entre ces deux lois.

que le champ électromagnétique[1] issu des équations de Maxwell possède lui aussi l'équivalent d'une quantité de mouvement. Sa prise en compte restaure la conservation de la quantité de mouvement totale du système[2], à condition que ce système soit maintenant compris comme l'ensemble : (matière + champ). L'analyse montre également que le champ n'est pas connu à l'aide seulement des positions (et des vitesses) des particules en raison de l'existence de ce rayonnement. Ainsi, pour traiter ce genre de problème à $N$ corps, il faut considérer que les inconnues sont non seulement les positions des particules chargées, mais aussi le champ électromagnétique global qu'il s'agit de déterminer en tout point de l'espace et à chaque instant. C'est là un ensemble d'inconnues continu et non pas discret comme l'est celui des positions. À strictement parler, le problème du mouvement de $N$ particules chargées sort donc du cadre que nous nous sommes fixés[3].

Le type de problème à $N$ corps qui va nous préoccuper étant précisé, il importe maintenant d'énoncer les conditions dynamiques typiques d'un tel problème, puis de recenser les définitions et théorèmes les plus connus de la dynamique newtonienne susceptibles d'aider à sa résolution. Bien souvent il s'agit d'obtenir une *intégrale première* dont une définition liminaire peut être la suivante :

> *On appelle intégrale première toute grandeur dynamique, scalaire ou vectorielle, qui est une fonction explicite*[4] *des positions et vitesses des points matériels, ainsi que du temps éventuellement, et dont la valeur (et l'orientation s'il s'agit d'un vecteur) sur les courbes-solutions reste constante.*

La connaissance d'un nombre suffisant de telles intégrales premières permet de résoudre le problème à $N$ corps considéré. C'est le cas du problème de Kepler dont la solution est ébauchée à la section **14**.

---

[1] Il serait plus correct de parler du tenseur électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ : en théorie relativiste, les deux champs électrique, $\vec{E}$, et magnétique, $\vec{B}$, sont en effet regroupés au sein d'un seul objet (représentable par une matrice pour dire les choses simplement).

[2] Cette loi fondamentale de la physique est donc à nouveau vérifiée, mais qu'en est-il alors du principe des actions réciproques ? À ce sujet, on lira avec profit la contribution de Sebens qui se prononce en faveur de ce principe à condition de prendre aussi en compte les forces agissant sur le champ : C.T. Sebens, *Forces on fields*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, **63** (2018).

[3] À moins bien sûr d'en faire une étude approximée qui revient ici à négliger le champ rayonné. C'est d'ailleurs ce que fait la mécanique quantique classique (*id est* non relativiste) lorsqu'elle traite de l'atome.

[4] Une fonction $f$ est une *fonction explicite* de la variable $x$ si $x$ apparaît explicitement dans l'écriture de $f$. Ainsi, si $f(x, y) = x\,y$, $f$ est une fonction explicite de $x$ et de $y$. À supposer maintenant que $x$ et $y$ soient des fonctions du temps $t$, on dira alors que $f$ est une *fonction implicite* de $t$. Par contre, si $f(x, y, t) = x\,y\,t$, alors $f$ est bien une fonction explicite de $t$.

**2. Le problème à $N$ corps de la dynamique newtonienne.** Soit donc une collection d'objets modélisable par un ensemble de $N$ points matériels $P_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, avec $N \geq 1$. Ces points matériels sont repérés par rapport à un certain référentiel galiléen $\mathcal{R} = \mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$ d'origine $O$ et dont les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ sont perpendiculaires entre eux (figure 1). Le temps $t$ est le temps absolu de la mécanique classique.
Le vecteur position associé à chaque point matériel $P_\alpha$ ainsi que ses vecteurs vitesse et accélération relativement à $\mathcal{R}$ seront toujours dénommés :

$$\vec{r}_\alpha := \overrightarrow{OP_\alpha}\,, \qquad \vec{v}_\alpha := d\vec{r}_\alpha/dt\,, \qquad \vec{a}_\alpha := d\vec{v}_\alpha/dt\,, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

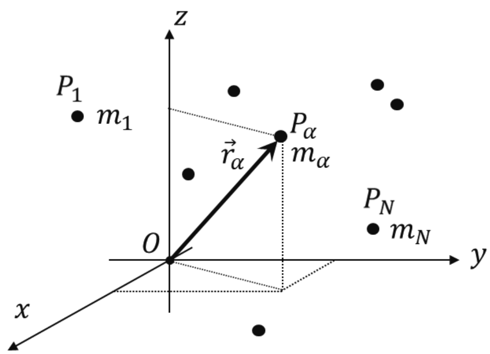


***Figure 1***. Le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ et le repérage d'un point $P_\alpha$ du système dynamique étudié par le vecteur position $\vec{r}_\alpha$.

Du point de vue dynamique, chaque point $P_\alpha$ dont la masse est $m_\alpha$ se meut sous l'effet d'un ensemble de forces aux origines diverses dont la résultante sera notée $\vec{F}_\alpha$. En général, ces forces sont comprises comme des données du problème et peuvent dépendre de la position et de la vitesse du point $P_\alpha$ ainsi que des positions et des vitesses des autres points matériels du système, du temps $t$, et encore d'un ensemble d'autres paramètres qui interviennent dans leurs définitions :

$$\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha\big(\vec{r}_\beta, \vec{v}_\beta, t, \{A_\alpha\}\big)\,, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, N$$

où $\beta = 1, 2, \dots, N$ et où $\{A_\alpha\}$ est l'ensemble de paramètres nécessaires pour spécifier complétement les origines de $\vec{F}_\alpha$.

Les mouvements possibles de ces $N$ points matériels sont régis par le principe fondamental de la dynamique qu'il nous faut écrire pour chaque $P_\alpha$ :

$$m_\alpha\, \vec{a}_\alpha \doteq \vec{F}_\alpha\big(\vec{r}_\beta, \vec{v}_\beta, t, \{A_\alpha\}\big)\,, \qquad \alpha = 1, 2, \dots, N \ , \qquad \beta = 1, 2, \dots, N$$

Ainsi, déterminer la trajectoire $\vec{r}_\alpha(t)$ suivie par chacun des points matériels $P_\alpha$ revient à résoudre un système de $N$ équations différentielles vectorielles couplées, du second ordre en les $\vec{r}_\alpha$ et généralement non linéaires.

Enfin, il est entendu que les positions et vitesses de chacun des points matériels sont connues à une date $t_0$ qui sera souvent prise pour origine des temps. Toutefois, on souhaite que ces conditions initiales soient quelconques en ce sens que l'on ambitionne de déterminer l'ensemble des mouvements possibles de chacun des points matériels qui constituent le système.

**3. Centre de masse.** Soit $M_N$ la masse totale du système dynamique constitué par les $N$ points matériels :

$$M_N := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha$$

On définit alors le point $C_N$, *centre de masse* du système, par la relation :

$$\overrightarrow{OC_N} := \frac{1}{M_N} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{OP_\alpha} = \frac{1}{M_N} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \vec{r}_\alpha$$

Le point $O$ dans cette définition peut être un point géométrique quelconque bien que l'on choisisse le plus souvent (comme ici) le point origine du référentiel utilisé. Si on remplace $O$ par $C_N$, on obtient une propriété qui peut être prise également comme définition de ce point particulier :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \, \overrightarrow{C_N P_\alpha} = \vec{0}$$

$C_N$ est aussi appelé *barycentre des masses* ou encore *centre d'inertie* des $N$ corps.

**4. Forces extérieures et forces intérieures.** Parmi les forces qui s'exercent sur chacun des points matériels $P_\alpha$, il y a lieu de distinguer entre les forces dont l'origine est extérieure au système et celles qui prennent leur source au sein même du système, c'est-à-dire les interactions que les points matériels exercent entre eux. On écrira ainsi, grâce au principe de superposition des forces : $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}$ où $\vec{F}_{\alpha,ext}$ représente la résultante de toutes les forces extérieures que subit le point matériel $P_\alpha$, et $\vec{F}_{\alpha,int}$ la résultante de toutes les forces intérieures que subit ce même point. Naturellement, cette distinction dépend de la façon dont on a défini le système, son intérieur et son extérieur.

On note $\vec{F}_{ext}$ la résultante de toutes les forces extérieures au système :

$$\vec{F}_{ext} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,ext}$$

De même, $\vec{F}_{int}$ sera la résultante de toutes les forces intérieures. L'expérience permet d'admettre que ces forces internes se conçoivent comme une superposition d'interactions entre paires de points matériels. Les $\vec{F}_{\alpha,int}$ s'expriment donc comme des sommes discrètes :

$$\vec{F}_{\alpha,int} = \sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\beta\to\alpha}$$

où $\vec{F}_{\beta\to\alpha}$ représente la force qu'exerce le $\beta$-ième point matériel sur le $\alpha$-ième, avec la convention : $\vec{F}_{\alpha\to\alpha} := \vec{0}\ ,\ \ \forall\,\alpha \in \{1, \dots, N\}$.
Dans ce cas, on a le résultat suivant :

$$\vec{F}_{int} := \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_{\alpha,int} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N} \vec{F}_{\beta\to\alpha} = \vec{0}$$

La double somme est nulle en effet car les forces de la physique newtonienne obéissent au *principe des actions réciproques* :

$$\vec{F}_{\beta\to\alpha} + \vec{F}_{\alpha\to\beta} = \vec{0}\ ,\quad \forall\,(\alpha,\beta) \in \{1,\dots,N\} \times \{1,\dots,N\}$$

**5. Théorème du mouvement du centre de masse.** Si on applique le principe fondamental de la dynamique à chacun des points matériels $P_\alpha$ et que l'on somme l'ensemble des équations vectorielles ainsi obtenues, il vient :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \vec{a}_\alpha \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\vec{F}_{\alpha,ext} + \vec{F}_{\alpha,int}\right]$$

Les masses $m_\alpha$ sont des données indépendantes du temps, de sorte que le membre de gauche de ce résultat se réécrit (d'après la section **3**) :

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\, \vec{r}_\alpha\right) = M_N\ \frac{d^2\overrightarrow{OC_N}}{dt^2} = M_N\ \vec{a}(C_N)$$

où l'on a posé : $\vec{a}(C_N) := d^2\overrightarrow{OC_N}/dt^2$, le vecteur accélération du centre de masse $C_N$. Quant au membre de droite du résultat précédent, il contient d'une part la résultante, $\vec{F}_{ext}$, de toutes les forces extérieures au système, et d'autre part la résultante, $\vec{F}_{int}$, de toutes les forces intérieures, qui est nulle (section **4**). D'où le *théorème du centre de masse* (Huygens, 1654) :

*Le centre de masse $C_N$ d'un système de $N$ points matériels adopte le même mouvement que celui d'un point matériel fictif auquel serait affectée la masse totale $M_N$ du système* *et sur lequel serait appliqué l'ensemble des forces extérieures au système :*

$$M_N\,\vec{a}(C_N) \doteq \vec{F}_{ext}$$

**6. Conservation de la quantité de mouvement totale du système.** *Supposons que le système soit isolé du reste de l'univers*, c'est-à-dire qu'aucune force extérieure n'agit sur lui : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$.
À partir du théorème précédent, on conclut que *le centre de masse de ce système réalise un mouvement rectiligne uniforme*.[1]

Définissons alors la *quantité de mouvement totale* $\vec{P}$ du système par la somme des quantités de mouvement de chaque point matériel qui le compose. D'après la définition du centre de masse (section **3**), on peut écrire :

$$\vec{P} := \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\,\vec{v}_\alpha = M_N\,\vec{v}(C_N)$$

où $\vec{v}(C_N) := d\overrightarrow{OC_N}/dt$ est le vecteur vitesse du centre de masse $C_N$. Ainsi, *si le système est isolé, on conclut que $\vec{P}$ est une intégrale première vectorielle* du problème considéré.

Grâce à cette intégrale première, le vecteur $\overrightarrow{OC_N}$ est maintenant connu en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OC_N}(t) \doteq \vec{v}(C_N)\,t + \overrightarrow{OC_N}(t_0) = \vec{P}\,t/M_N + \overrightarrow{OC_N}(t_0)$$

où $\vec{P}$ [ou si l'on veut $\vec{v}(C_N)$] et $\overrightarrow{OC_N}(t_0)$ sont fonctions des conditions initiales au temps $t_0$. Comme $\overrightarrow{OC_N}$ est une combinaison linéaire des $\vec{r}_\alpha$, l'un de ces $\vec{r}_\alpha$ s'exprime donc en fonction de tous les autres et d'une fonction connue du temps : il ne reste plus que $(N-1)$ inconnues vectorielles à déterminer.

**7. Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels**. Ce théorème est démontré d'abord sous un aspect général avant de le décliner sous sa forme la plus connue.

On définit le *moment cinétique total* $\vec{\sigma}_A$ du système de $N$ points matériels par la somme des moments cinétiques de chacun des points matériels, calculés par rapport à un point $A$ quelconque :

---

[1] Cette conclusion est aussi valable pour un *système pseudo-isolé*, c'est-à-dire un système pour lequel $\vec{F}_{ext}$ est nulle sans que toutes les $\vec{F}_{\alpha,ext}$ le soient.

$$\vec{\sigma}_A := \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

où le symbole $\wedge$ représente l'opération « produit vectoriel ». Souvent, le point $A$ est en fait l'origine $O$ du référentiel choisi ; on note alors $\vec{\sigma} := \vec{\sigma}_O$ .

Si on effectue le produit vectoriel par $\overrightarrow{AP_\alpha}$ de chaque équation de Newton écrite pour chacun des points matériels $P_\alpha$ et que l'on somme l'ensemble, on obtient :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{a}_\alpha \doteq \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,ext} + \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,int}$$

On modifie les termes de cette expression première du théorème de la façon suivante : tout d'abord, le membre de gauche peut s'exprimer en fonction de la dérivée temporelle du moment cinétique total. En effet :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_\alpha - \overrightarrow{OA}\right] \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{a}_\alpha$$

D'où, en appelant $\vec{v}(A) := d\overrightarrow{OA}/dt$ le vecteur vitesse du point $A$ :

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{a}_\alpha = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{v}(A) \wedge \vec{P}$$

où $\vec{P}$ est la quantité de mouvement totale du système définie à la section **6**.

Ensuite, le premier terme du membre de droite de l'expression première du théorème est le *moment*[1] *de toutes les forces extérieures au système*, calculé par rapport au point $A$ :

$$\vec{M}_{ext,A} := \sum_{\alpha=1}^{N} \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}_{\alpha,ext}$$

Enfin, en utilisant le principe des actions réciproques, le second terme du membre de droite de l'expression première, qui est le moment de toutes les forces intérieures au système, se réécrit (d'après la section **4** et après un calcul vectoriel élémentaire) :

[1] Le moment, par rapport à un point $A$, d'une force $\vec{f}$ appliquée sur un point matériel $P_\alpha$ est défini par :

$$\vec{M}(A\,;\vec{f}) := \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{f}$$

Il exprime la capacité de la force $\vec{f}$ à faire tourner $P_\alpha$ autour de $A$. Si $A$ est le point origine $O$ du référentiel, on écrira : $\vec{M}(\vec{f}) := M(O\,;\vec{f})$.