CHAPITRE 2

Traduction du problème

« La réponse est oui. Mais quelle était la question ? »
Woody Allen

Les mots dans les problèmes

Dans un livre scolaire, un exercice propose au collégien de 6e de dissocier le langage mathématique du langage courant : « Qui a dit quoi ? »

L'animateur de colo	Le principal du collège	Le « prof » de maths

- « Combien de fois faudra-t-il vous répéter qu'on ne parle pas du milieu d'un cercle mais de son centre ! »
- « Que tous les élèves de sixième se mettent au milieu de la cour. »
- « Mettez-vous en cercle et toi, Fanny, viens au milieu. »

Une consigne en bas de l'exercice précise de même : « Attention ! Certains mots ont en mathématiques un sens très précis (par exemple : le milieu d'un segment) alors que dans le langage courant on peut les utiliser dans des occasions très diverses. »

L'enfant est prévenu : pour accéder aux mathématiques, il lui faudra délaisser ses connaissances antérieures, accepter d'apprendre le vocabulaire nouveau et circonscrire par une définition précise et rigoureuse le champ sémantique de chaque mot employé. À défaut de fournir cet effort, il prend le risque d'échouer dans la lecture de la consigne ou de l'énoncé par confusion de sens avec les mots du langage usuel.

Michelle Bacquet (1996) a bien résumé cette problématique dans un trait humoristique : « Paul exige d'être payé comptant, en argent liquide. Comptant ? Content ? Argent liquide ? Étrange, les pièces de monnaie et les billets se transforment-ils ? Mais dans les problèmes, que ne rencontre-t-on pas ! On peut ainsi trouver des nombres "naturels" : il y en a donc qui font des manières ? Des moyennes de notes, qui, calculées, se révèlent très en dessous de la moyenne… "Le montant d'un calcul approché par défaut" : ah bon, il faut calculer avec un défaut ? Et les poids qui ne sont pas toujours nets et qui peuvent même avoir une tare… »

Il est vrai qu'en mathématiques, chaque mot a une valeur bien spécifique qui n'admet aucune ambiguïté : lorsque l'enfant aura pour consigne de « réduire au même dénominateur entier positif les quotients », sa démarche sera bien différente de celle d'une cuisinière même si, dans les deux cas, il y a bien réduction des éléments premiers !

La question du vocabulaire mathématique et de sa spécificité ne semble pas primordiale pour l'enfant. Après tout, pourquoi s'ennuyer à comprendre et à apprendre toutes ces définitions préalables qui l'ennuient à mourir tant cela lui semble évident et banal ! « Les maths, ce n'est pas du français… » se dit-il. Il a véritablement l'impression de dominer le sujet quand arrive soudainement le problème énigmatique ou la figure géométrique qui le rend perplexe : voilà que le socle de ses connaissances n'est plus aussi solide qu'il le croyait ! Car les premières définitions n'avaient pas de sens en elles-mêmes, mais uniquement dans les problèmes ultérieurs qu'elles permettront de résoudre (figure 2.1).

Et comment s'y retrouver lorsque les triangles peuvent être rectangles mais les rectangles ne peuvent être triangles et qu'il faut différencier les médianes des médiatrices et le cercle inscrit du cercle circonscrit ?

Un écrit mathématique est donc constitué de deux codes en interaction : la langue naturelle du français rencontrée dans les autres matières scolaires et le langage mathématique qui emprunte de nombreux mots à la langue auxquels il donne une signification propre. Cette distinction entre langage ordinaire et langage mathématique rappelle évidemment celle faite par Lev Vygotsky entre concepts quotidiens et concepts scientifiques (Schneuly et Bronckart, 1985). Mais ce n'est pas en s'exprimant le plus correctement possible qu'on favorisera

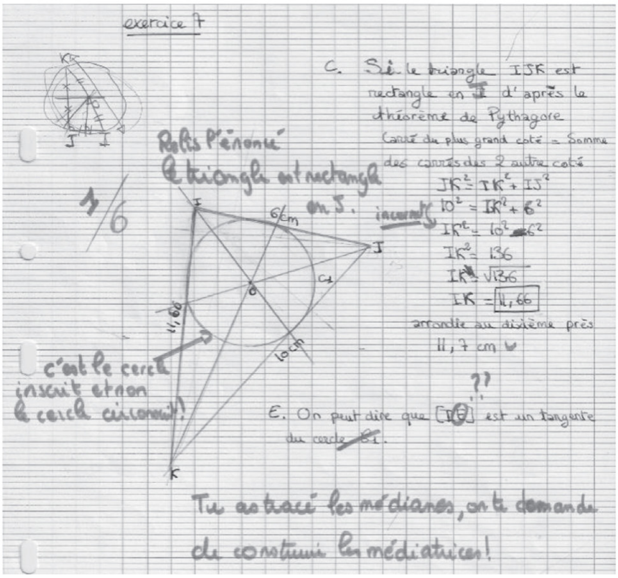


FIGURE 2.1. **Quelques mots du vocabulaire géométrique.**

l'acquisition de connaissances mathématiques et géométriques. Car il est trop schématique de croire que l'enfant construit les notions en réfléchissant ses actions et qu'il puisse exprimer ces notions sous une forme langagière correcte. Comme l'a écrit Vygotsky : « la relation de la pensée au mot, n'est pas une chose statique, mais un processus, un mouvement perpétuel allant et venant de la pensée au mot et du mot à la pensée. Dans ce processus, la relation de la pensée au mot subit des transformations qui, elles-mêmes, peuvent-être considérées comme un développement au sens fonctionnel du terme. Les mots ne se contentent pas d'exprimer la pensée : ils lui donnent naissance »

Ainsi, les termes mathématiques comme *droite*, *carré*, *point*, *nombre*, *chiffre*, contrairement à la polysémie des mots de la langue naturelle, apparaissent généralement comme univoques et renvoient à des définitions précises qui s'intègrent au champ mathématique. Le *chiffre du chômage* n'est pas un chiffre, c'est avant tout un nombre et l'émission *Des chiffres et des lettres* combinent bien des lettres entre elles pour former un mot, mais c'est par le calcul combiné de nombres et non de chiffres qu'on obtient le résultat final ! Si le *carré* est mathématiquement soit un quadrilatère plan à côtés égaux et 4 angles droits, soit le produit d'un nombre multiplié par lui-même, il n'en reste pas moins qu'il évoque aussi dans le langage courant la salle de repas des officiers de marine, un morceau du potager dans le jardin, une réunion de quatre cartes semblables dans un jeu de cartes ou encore l'ensemble des côtelettes du porc !

Voici des exemples de la polysémie de quelques mots :

- le cube est un solide/ce mur est très solide ;
- le pavé possède 12 arrêtes/le poisson a des arêtes ;
- le cube possède 6 faces/elle montre son visage de face ;
- le patron d'un cube/c'est le patron de l'usine ;
- le produit est le résultat d'une multiplication/pour nettoyer, il faut du produit ;
- 8 est le double de 4/la voiture double le camion ;
- mettre dans l'ordre croissant/le boulanger cuit un croissant ;
- la table de multiplication/la table de la salle à manger ;
- un triangle possède 3 sommets/le sommet de la montagne (figure 2.2) ;
- etc.

Les mots dans l'énoncé de l'exercice 14 (item proposé dans les tests d'évaluation de l'Éducation nationale) entraînent quelquefois des confusions de sens (figure 2.3) :

- un jardinier achète 9 rosiers à 4 € pièce et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de la commande ?

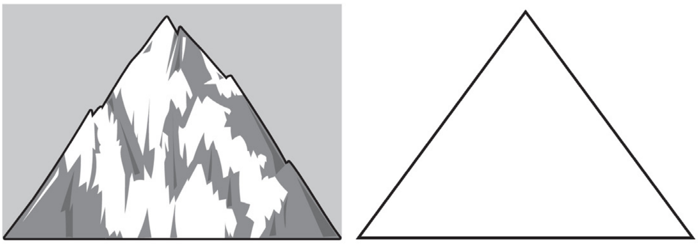
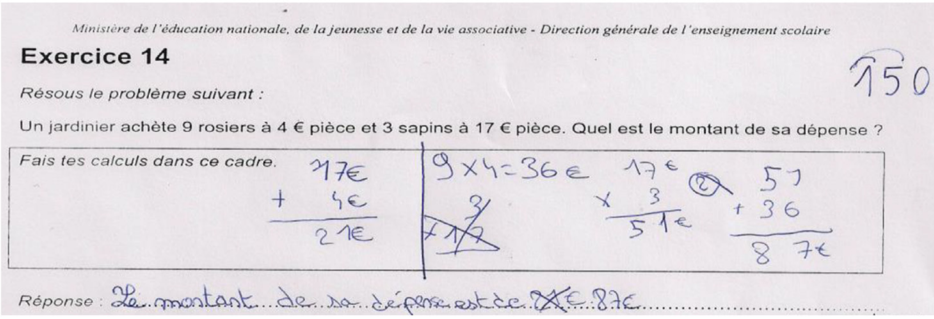


FIGURE 2.2. **Combien le triangle possède-t-il de sommets ?**
© Carole Fumat.



Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative - Direction générale de l'enseignement scolaire

Exercice 14

150

Résous le problème suivant :

Un jardinier achète 9 rosiers à 4 € pièce et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de sa dépense ?

Fais tes calculs dans ce cadre.

17€ + 4€ = 21€

9 x 4 = 36 €

17 € x 3 = 51 €

51 + 36 = 87 €

Réponse : Le montant de sa dépense est de 87€

FIGURE 2.3. **Un problème en contexte.**

– Céline, en CM2, pense que cela coûte 4 € : « Ben, 2 € pis 2 €, ça fait 4 €… Y a deux pièces ! »

– Quant à Pauline (en 3e), elle parcourt l'énoncé et répond très vite 21 € : « J'vois 17 et 4, je calcule ! » Je lui demande de préciser sa démarche : « Il achète 3 sapins pour 17 €, il achète 9 rosiers pour 4 € » Je lui demande alors de relire le texte à haute voix. Pauline lit rapidement le texte et oublie les deux mots pièce. Après une troisième lecture demandée, je la questionne : « Que veut dire le mot pièce ? – Ah, oui, c'est à l'unité !... Alors, faut faire 3 fois 17… »

Comme nous le voyons, il y a bien une différence d'abstraction entre chaque contenu sémantique. En ce sens, la mathématique est bien le domaine de l'abstraction qui marque le passage entre le monde réel et le monde des concepts. Différents degrés d'abstraction se rencontrent actuellement dans les mathématiques mais, à l'origine, les objets, les définitions et les opérations étaient au plus près du monde réel :

• **les objets :** chez les Grecs, la notion de point n'était qu'une représentation mentale de la place d'un bâton marquant la limite d'un champ et la droite représentait la direction d'une corde tendue par l'agriculteur ou l'arpenteur. C'était en quelque sorte un signe de repère : le point n'a pas de partie. Au XVIIe siècle, le point a encore une épaisseur qui correspond à la douzième partie de l'épaisseur d'un moyen grain d'orge (0,188 mm) alors que la ligne était égale au diamètre du même grain d'orge !

• **les définitions :** on retrouve chez Euclide l'influence de l'art de la construction dans sa définition de la droite. « La droite est celle qui est également placée entre ses points » renvoie à l'exigence de vérifier la tension d'une corde placée entre deux piquets. En plaçant un œil derrière le piquet, l'architecte constate alors que la corde est « également placée entre ses points » ;

• **les opérations** sont restées pendant très longtemps proches du concret et de l'environnement social. Ainsi, en Égypte, le papyrus Rhind (rédigé vers 1650 av. J.-C.) affirme dans son introduction qu'il est « une étude de toutes choses, une vision de tout ce qui existe, une explication de tous les secrets obscurs ». Ce papyrus rassemble 87 problèmes avec leurs solutions comme, par exemple, la répartition d'un certain nombre de pains entre un nombre donné de personnes. Chez les Babyloniens, les mathématiques étaient adaptées aux besoins concrets de la comptabilité et de la finance. La notion de nombre signifie pour Euclide nombre entier et les définitions du livre VII de ses *Éléments* montrent que la manipulation des nombres s'effectue dans un contexte essentiellement géométrique. En 1637, René Descartes rejette la notion de nombre négatif comme des faux nombres, en argumentant par la question « est-il possible qu'il existe des quantités moindres que rien ? » Et, au début du XIX^e siècle, les nombres relatifs ne sont toujours pas formalisés : les mathématiciens Leonhard Euler (1748), Lazare Carnot (1803) et Augustin Louis Cauchy (1821) ont des scrupules à les utiliser car chaque définition qu'ils donnent entraîne des conséquences inacceptables pour eux : « 3 serait moindre que 2, cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 ; c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales 2 et (– 3), le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se formuler de la quantité. »

Mais, progressivement, les mathématiciens vont s'abstraire du réel et proposer une codification et de nouveaux symboles ; c'est vers l'an mille que les savants arabes tentent d'affranchir l'algèbre de la pensée géométrique et d'en faire une technique générale permettant de traiter les inconnues de manière uniquement arithmétique. Notons par ailleurs que le mot « algèbre » vient d'une translittération latine de *al-jabr* qui signifie « réduction », « contrainte » et que le mot « algorithme » dérive du nom du savant Al-Khwârizmî, auteur du traité *Hisab al-jabr w'al-muqabala* (« Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison »).

Bien après, l'invention de la virgule permettra d'accélérer le rangement des nombres avec l'introduction des nombres décimaux ; les opérations sur les fractions s'assimilent alors aux opérations sur les nombres entiers (au lieu d'écrire ¼, on posera 0,25). Le calcul symbolique est donc assez récent en regard de l'histoire des mathématiques. Jusqu'au XV^e siècle, on raisonnait et on écrivait avant tout avec le langage usuel. Les signes + et – apparaissent en 1489 (Johannes Widmann), le signe = en 1557 (Robert Recorde) tandis que les signes < et > seront introduits au début du XVII^e siècle par Thomas Harriot (1560-1621).

L'invention du zéro

Le signe zéro apparaît en Inde au début du VI^e siècle : son premier sens, désigné en langue sanscrite par le mot *shûnya*, signifie « vide », et il faudra attendre le VII^e siècle pour qu'il devienne en lui-même un nombre à part entière : le zéro exprime alors la quantité nulle. Ce pas est décisif et conduira à l'ultime perfectionnement de la notation numérique, car ce nombre a des propriétés particulières quand on fait certaines opérations arithmétiques.

Mais comment ce « vide » s'imposa-t-il comme un signe ? Une numération avant d'être figurée est d'abord une numération parlée. Les mathématiciens et astronomes indiens avaient pris l'habitude d'exprimer un nombre en énonçant la succession des noms des unités correspondantes, tout en respectant l'ordre de leur progression dans la base. Par exemple, le nombre 2 437 s'exprimait « sept-trois-quatre-deux » : cette numération parlée était donc une véritable numération de position [$= 7 + (3 \times 10) + (4 \times 100) + (2 \times 1\,000)$]. Pourtant, celle-ci ne pouvait exprimer un nombre tel 402, où manque une décimale : « deux-quatre » voulait dire *quarante-deux* et non *quatre cent deux*. Il fallait donc trouver un nom particulier pour marquer l'absence de la dizaine. Le mot *vide* vient combler le manque et 402 pourra s'énoncer *deux-vide-quatre*, ce qui exclura désormais toute équivoque. Le zéro attendra encore quelques siècles avant de passer en occident (au XII^e^ siècle). Bien avant, lorsque les Arabes découvrent la numération indienne, ils traduisent *shûnya* par *sifr*. Avec les croisades, le petit *sifr* sera transcrit sous diverses formes aux consonances plus latines : *sifra*, *cifra*, *cifre*, *cyfre*, etc. Dans son *Liber abaci*, Léonard de Pise (vers 1170-1250), dit Fibonacci, lui donne le nom de *zephirum* qui aboutira à l'italien *zefiro* et qui donnera en fin de compte notre mot zéro (à partir de 1491). L'idée géniale des mathématiciens indiens d'inventer neuf chiffres (dits « arabes »), puis de marquer le vide, l'absence par un symbole déterminé donne aux mathématiques un système de numération exceptionnel : dix signes graphiques suffisent amplement pour produire n'importe quel nombre, quelle que soit sa grandeur ! Le système des chiffres indo-arabes permet désormais de faire beaucoup avec peu !

Comprendre les données d'un problème

Généralement, un énoncé de problème possède des caractéristiques propres :
1. un lexique réduit qui utilise des termes inducteurs d'opérations arithmétiques ;
2. des données numériques généralement transcrites dans le code numéral arabe (ces données ne doivent pas être manquantes ou en surnombre) ;
3. une ou plusieurs questions placées en fin d'énoncé ;
4. une sériation des informations permettant l'émergence de procédures de résolution ;
5. une organisation des savoirs qui repose sur un certain nombre d'implicites (en référence au contrat didactique ou dévolution selon Guy Brousseau, 1986).

Dans les problèmes, différents moyens lexicaux et syntaxiques sont utilisés pour distinguer les états, les transformations et les relations (verbes d'état/verbes d'action). De même, les états (ou les relations ou les transformations) doivent se différencier et il sera important de noter cette information par l'emploi de l'imparfait, du présent et du passé composé ou encore du présent versus futur, sans négliger la présence d'opérateurs sémantiques comme les locutions adverbiales, prépositions et conjonctions qui indiquent les relations (temporelles, de comparaison, de quantification, etc.) : *avant*, *après*, *maintenant*, *au début*, *à la fin*, *en tout*, etc. (Ménissier, 2002). Certains verbes comme *gagner*, *perdre*, *donner*, *recevoir*, *dépenser,* etc. permettent d'identifier le sens des transformations, mais ils peuvent aussi perturber une bonne intégration des données et influencer le choix inapproprié de l'opération. *Donner* ou *avoir plus que* sont des mots inducteurs mais ils n'entraînent pas systématiquement une addition comme dans le cas où l'opérateur sémantique et l'opérateur mathématique ne sont pas de même signe :

• énoncé 1 : Pierre a donné 5 bonbons à Marie qui en a maintenant 8. Combien Marie avait-elle de bonbons au début ?

• énoncé 2 : Paul possède 8 €. Il a 3 € de plus que Jean. Quelle somme possède Jean ?

L'action de *donner*, la relation *avoir plus que* doivent s'interpréter comme des variables dans le cadre plus général d'une mise en schéma, lui-même défini comme l'ensemble organisé des variables du problème. Dellarosa Cummins, Kintsch, Reusser et Weimer (1988) ont montré que certains termes de relation restent difficilement interprétables par de jeunes enfants (cours élémentaire) qui, par exemple, comprennent « Jean a 4 billes. Marie a 3 billes de plus... » comme « Jean a 4 billes. Marie a 3 billes... » Et si l'on postule qu'un bon indicateur de la représentation d'un problème consiste à demander à l'enfant un rappel de l'énoncé, on constate que celui-ci est rarement redonné littéralement. La restitution évoque plutôt le modèle mental que l'enfant construit. Ainsi, Kintsch et Greeno (1985) rapportent que le rappel d'énoncés complexes après résolution correspond à des problèmes plus simples alors que le rappel des mêmes énoncés avant résolution reste conforme à l'énoncé proposé. L'enfant traiterait donc un énoncé de problème dans un premier temps de façon « textuelle », ce qui conduirait à un rappel littéral des éléments de l'énoncé et, dans un second temps, de manière « sémantique » (Ehrlich, 1990), ce qui provoque le rappel d'un énoncé reconstruit, témoin de l'élaboration d'un schéma de représentation.

Mais si les mots de l'énoncé peuvent tromper l'enfant dans l'intégration du problème, ils peuvent aussi lui rendre l'interprétation plus aisée. Dans l'énoncé « Jacques a 15 petites voitures et 8 petits camions. Combien a-t-il de véhicules ? », l'opérateur sémantique n'est pas explicité. Le seul changement de la question en « Combien a-t-il de véhicules en tout ? » marque l'inconnue à trouver et indique le type de problème (combinaison où deux mesures se composent pour donner une mesure). Néanmoins, on ne peut pas toujours expliciter toutes les données de l'énoncé. Pouvons-nous améliorer la compréhension de l'énoncé « Combien y a-t-il de gâteaux dans 3 paquets de 24 gâteaux ? ». Ajoutons l'information en tout afin de marquer la recherche demandée de la totalité : « Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 3 paquets de 24 gâteaux ? ». Mais ce n'est pas les 3 paquets qui contiennent 24 gâteaux en tout. Pouvons-nous ajouter : « Combien y a-t-il de gâteaux en tout dans 3 paquets de chacun 24 gâteaux ? » ? Si nous avons ajouté de la précision, la formulation reste néanmoins peu fréquente[1]. Il arrive un moment où l'on ne peut pas tout dire et

1. La langue chinoise permet cependant cette approche par introduction systématique entre le nombre et les objets demandés d'un terme caractérisant l'unité considérée. Ainsi on ne dira pas « trois chiens » mais « trois animal chien ». À ce titre, les éléments sémantiques utilisés pour le vocabulaire mathématique seront plus ou moins explicites et pragmatiques selon la langue employée.

la frontière entre ce qui est dit et ce qui est implicite dans un énoncé reste pour le moins mouvante.

Une seule variation dans la formulation ou la présentation d'un énoncé peut décider du type de procédure de résolution. Ainsi, Woodworth et Schlosberg (1964) ont invoqué un « effet d'atmosphère » qui agirait sur le sujet et induirait celui-ci à employer des stratégies basées sur les indices présents. Soit deux énoncés A et B :

• énoncé A. Yves dit à René : « J'ai 7 € de plus que toi, mais si nous mettons notre argent dans un porte-monnaie, nous aurons ensemble 63 €. Que possède Yves et que possède René ? »

 – Ce type de présentation entraîne généralement la stratégie de soustraire 7 à 63, puis de diviser ce résultat par 2 pour trouver ce que possède René et, enfin, d'ajouter 7 pour connaître la somme d'argent possédée par Yves (mais on peut faire l'inverse : « J'ajoute 7, ça fait 70. Maintenant ils ont pareil, ça fait 35 chacun et j'enlève 7 pour trouver 28 »).

 – Signalons ici une stratégie basée sur l'activation d'un fait multiplicatif (stratégie proposée en formation par une collègue) : 63 c'est le produit de 7×9. Donc, Yves possède les 5/9 de la somme (d'où $5 \times 7 = 35$) et René les 4/9 (d'où $4 \times 7 = 28$) ;

• énoncé B. « Connaissant leur somme et leur différence, trouver deux nombres x et y tels que :

 $x + y = 63$
 $x - y = 7$ ».

 – En revanche, cet énoncé qui présente un problème analogue sera plutôt résolu dans le cadre d'une double équation à 2 inconnues en déroulant une routine de résolution.

Résoudre un problème arithmétique avec un énoncé écrit nécessite de lire l'énoncé pour le comprendre. Le sujet doit donc comprendre ce qu'il lit pour que chaque proposition du problème soit traduite en une représentation interne. Pour ce faire, il doit disposer au préalable de deux sortes de connaissances :

1. des connaissances linguistiques, car il y a bien une phase préalable de compréhension d'un énoncé ou d'une consigne pendant laquelle vont interagir des processus de perception mais aussi des processus de recherche et de sélection des connaissances pertinentes. Ces connaissances permettent l'application de composants cognitifs tels que le décodage, l'accès lexical, l'analyse syntaxique et l'analyse sémantique des éléments du texte. Comme l'avait souligné Jean-François Richard (1990), « La formulation est une partie aussi essentielle du problème que les relations qui sont exprimées, dans la mesure où elle a un rôle déterminant dans la construction de la représentation du problème ». De même, l'emploi de certains mots entraîne chez l'enfant de cours élémentaire une variation importante dans leurs performances. Ainsi, Tom Hudson, dans une recherche rapportée par Sylvie Gamo (2007), présente un problème de type comparaison (8 images montrant, par exemple, 5 oiseaux et 4 vers de