Bekkai Messirdi
Abdellah Gherbi
Sofiane Messirdi

Distributions : théorie et illustrations

Cours avec 155 exercices corrigés

ellipses

1. Espaces vectoriels topologiques localement convexes

Les espaces vectoriels topologiques sont un outil de base de l'analyse fonctionnelle. Ce sont des espaces munis d'une structure topologique associée à une structure d'espace vectoriel, avec des relations de compatibilité entre les deux structures. Les exemples les plus simples d'espaces vectoriels topologiques sont les espaces vectoriels normés, parmi lesquels figurent les espaces de Banach, en particulier les espaces de Hilbert.

1.1 Rappels de topologie

On rappelle qu'une topologie τ sur un ensemble X est une famille de parties de X appelées ouverts, qui est stable par union quelconque et intersection finie, et qui contient X et l'ensemble vide $\emptyset$. Le couple (X, τ) est appelé espace topologique.

Soient (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. Un voisinage de x pour la topologie τ est une partie $V \subset X$, pour laquelle il existe un ouvert U contenant x et inclus dans V. L'ensemble de tous les voisinages de x sera noté $\mathcal{V}(x)$.

$\mathcal{V}(x)$ vérifie les quatre propriétés fondamentales suivantes :

(i) Tout voisinage de x contient x :

$$V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow x \in V.$$

En effet, si $V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists U \in \tau$, tel que $x \in U \subset V$, alors $x \in V$.

(ii) Toute partie de X contenant un voisinage de x est aussi un voisinage de x :

$$(W \text{ partie de } X,\ V \in \mathcal{V}(x),\ V \subset W) \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x).$$

En effet, puisque $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $\exists U \in \tau$, tel que $x \in U \subset V \subset W$, donc W est bien un voisinage de x.

(iii) Toute intersection finie de voisinages de x est aussi un voisinage de x :

$$(V_1 \in \mathcal{V}(x) \text{ et } V_2 \in \mathcal{V}(x)) \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x).$$

Par définition, il existe deux ouverts $U_1 \in \tau$ et $U_2 \in \tau$ tels que $x \in U_1 \subset V_1$ et $x \in U_2 \subset V_2$. Donc $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$, comme $U_1 \cap U_2 \in \tau$, on en déduit que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(iv) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x),\ W \subset V :\ (\forall y \in W \Longrightarrow V \in \mathcal{V}(y)).$$

En effet, si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $U \in \tau$ tel que $x \in U \subset V$. Posons $W = U$, alors $W \in \tau$, $W \subset V$ et $\forall y \in W$, on a $y \in W \subset V$ donc par définition V est bien un voisinage de y.

> **!** Dans un espace topologique un ensemble ouvert est voisinage de chacun de ses points.

Réciproquement, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1 Etant donné un ensemble non vide X, on se donne pour chaque $x \in X$ une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de X de telle sorte que :

(1) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $x \in V$;

(2) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et W une partie de X telle que $V \subset W$ alors $W \in \mathcal{V}(x)$;

(3) $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie : si $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(x)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$;

(4) Si $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et $V \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in W$.

Alors il existe une topologie et une seule τ sur X pour laquelle pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ est la famille des voisinages de x pour τ.

Démonstration. On pose :

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall x \in A,\ A \in \mathcal{V}(x)\} \cup \{\emptyset\}$$

où $\mathcal{P}(X)$ désigne la famille de toutes les parties de X.

(a) Il est clair que $\emptyset \in \tau$. D'autre part, soient $x \in X$ et $A \in \mathcal{V}(x)$, comme $A \subseteq X$, il en découle de (2) que $X \in \mathcal{V}(x)$. Ceci étant vrai quelque soit $x \in X$, donc $X \in \tau$.

τ contient l'ensemble vide et X.

(b) Soient $A_1, A_2 \in \tau$ et $x \in A = A_1 \cap A_2$. D'où, $x \in A_1$, $x \in A_2$, $A_1 \in \mathcal{V}(x)$ et $A_2 \in \mathcal{V}(x)$. D'après l'axiome (3), $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{V}(x)$ et alors $A \in \mathcal{V}(x)$, quelque soit $x \in A$, par suite $A \in \tau$.

τ est stable par intersection finie.

(c) Soit $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ où $A_i \in \tau$, $\forall i \in I$ (I est un ensemble d'indice quelconque). Il existe alors $j \in I$ tel que $x \in A_j$, donc $A_j \in \mathcal{V}(x)$, comme $A_j \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, on a aussi $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{V}(x)$ en vertu de (2). Alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.

τ est stable par union quelconque.

Par conséquent, τ est bien une topologie sur X. Notons pour tout $x \in X$ par $\mathcal{L}(x)$ la famille des voisinages de x pour la topologie τ ainsi construite. On doit montrer que $\mathcal{L}(x) = \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in X$.

$\mathcal{L}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$. Si $A \in \mathcal{L}(x)$, il existe $U \in \tau$ tel que $x \in U \subset A$, donc par construction $U \in \mathcal{V}(x)$ et d'après l'axiome (2), $A \in \mathcal{V}(x)$.

$\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{L}(x)$. Si $A \in \mathcal{V}(x)$, soit $U = \{y \in X : A \in \mathcal{V}(y)\}$.

On a $x \in U$ d'après (1) et $U \subseteq A$ d'après le même axiome.

Montrons que $U \in \tau$. Soit $y \in U$, donc $A \in \mathcal{V}(y)$ et d'après l'axiome (4) il existe $B \in \mathcal{V}(y)$, $B \subset A$, tel que si $z \in B$ on a $A \in \mathcal{V}(z)$. Alors :

$$\forall z,\ z \in B \Longrightarrow z \in U$$

c'est à dire $B \subset U$. De $B \in \mathcal{V}(y)$ et $B \subset U$, on a $U \in \mathcal{V}(y)$, et donc $U \in \tau$. Ainsi, $x \in U \subset A$ et $U \in \tau$, alors $A \in \mathcal{L}(x)$.

Il reste à établier que la topologie τ est unique.

Soit T une autre topologie sur X ayant pour $\mathcal{V}(x)$ la famille des voisinages de x, pour tout $x \in X$. Montrons que $T = \tau$.

$\mathbf{T} \subset \tau$. Soit $U \in T$, alors $\forall x \in U$, $U \in \mathcal{V}(x)$, donc $U \in \tau$.

$\tau \subset \mathbf{T}$. Soit $U \in \tau$, donc $\forall x \in U$, $U \in \mathcal{V}(x)$. U est aussi un voisinage de x pour T, il existe alors $W_x \in T$ tel que $W_x \subset U$. En fait, on a $U = \bigcup_{x \in U} W_x \in T$. □

Définition 1.1 Soient (X, τ) un espace topologique et $x \in X$. Un ensemble $\mathcal{B}(x)$ de parties de X est un système fondamental de voisinages de x si $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ et pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.

Exemple 1.1 Dans un espace métrique (X, d), l'ensemble $\mathcal{B}(x)$ des boules ouvertes centrées en x, forme un système fondamental de voisinages de x.

Définition 1.2 Soit (X, τ) un espace topologique. Une famille $\mathcal{B}$ d'ensembles ouverts de X est appelée une base de la topologie τ de X si tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.2 $\mathcal{B} = \{]a, b[\ : a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.
Les disques ouverts forment une base de la topologie de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
L'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique est une base de la topologie induite par la métrique de cet espace.

Proposition 1.2 Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ une famille de parties de X ($\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$).
$\mathcal{B}$ est une base de topologie sur X si et seulement si :

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,

(2) pour tout $U, V \in \mathcal{B}$, $U \cap V$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Démonstration. Si τ désigne l'ensemble des réunion quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$, alors (X, τ) est un espace topologique de base $\mathcal{B}$.
En effet,

(i) $X \in \tau$ d'après la condition (1). Si $I = \emptyset$, $\bigcup_{i \in I} B_i = \emptyset \in \tau$.

(ii) Soient A_1 et A_2 dans τ, avec $A_1 = \bigcup_{i\in I_1} A_{i,1}$ et $A_2 = \bigcup_{j\in I_2} A_{j,2}$ où $A_{i,1} \in \mathcal{B}$, $\forall i \in I_1$ et $A_{j,2} \in \mathcal{B}$, $\forall j \in I_2$. Alors,

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \left(\bigcup_{i\in I_1} A_{i,1}\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in I_2} A_{j,2}\right) = \bigcup_{i\in I_1}\bigcup_{j\in I_2}\left(A_{i,1}\cap A_{j,2}\right) \\ &= \bigcup_{(i,j)\in I_1\times I_2} \left(A_{i,1}\cap A_{j,2}\right). \end{aligned}$$

En notant $\lambda = (i,j) \in L = I_1 \times I_2$, on a $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ où $A_\lambda = A_{i,1} \cap A_{j,2}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, d'après la condition (2), soit $A_\lambda = \bigcup_{k\in K} A_{\lambda,k}$, $A_{\lambda,k} \in \mathcal{B}$, $\forall \lambda \in L$, $\forall k \in K$. Ainsi,

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{\lambda\in L}\bigcup_{k\in K} A_{\lambda,k} = \bigcup_{(\lambda,k)\in L\times K} A_{\lambda,k} \in \tau.$$

(iii) Soit $\{A_i : i \in I\}$ une famille quelconque de τ. Alors, $\forall i \in I$, $A_i = \bigcup_{j\in J} A_{i,j}$ avec $A_{i,j} \in \mathcal{B}$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_{i,j} \in \tau.$$

D'où, τ est bien une topologie sur X et $\mathcal{B}$ est une base de τ, puisque tout ouvert est par construction réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Inversement, si $\mathcal{B}$ est une base de topologie τ sur X, alors :

(1) $\tau \ni X = \bigcup_{i\in I,\ B_i\in\mathcal{B}} B_i \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset X$, donc $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(2) $\forall U, V \in \mathcal{B}$, on a $U, V \in \tau$, donc $U \cap V \in \tau$, et alors

$$U \cap V = \bigcup_{j\in J} B_j,\ B_j \in \mathcal{B},\ \forall j \in J.$$

□

Si (X,τ) est un espace topologique de base $\mathcal{B}$, alors τ coïncide avec l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 1.3 L'ensemble des intervalles ouverts forme une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. On peut même se limiter aux intervalles dont les extrémités sont rationnelles, faisant de $\mathbb{R}$ un espace topologique à base dénombrable. En revanche, l'ensemble des intervalles semi-infinis de type $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ où a est un nombre réel, n'est pas une base d'une topologie sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $]-\infty, 1[$ et $]0, +\infty[$ appartiennent bien à cet ensemble, mais leur intersection $]0, 1[$ ne peut pas être exprimée comme union d'élements de cet ensemble.

Définition 1.3 On appelle filtre sur un ensemble non vide X, toute partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les axiomes :

(1) Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$;

(2) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Exemple 1.4

1. Soient X un ensemble non vide et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x_k : k \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

et

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists n \in \mathbb{N},\ X_n \subseteq A\}.$$

$\mathcal{F}$ est bien un filtre sur X. $\mathcal{F}$ est appelé le filtre élémentaire associé à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Si (X, τ) est un espace topologique, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur X, c'est le filtre des voisinages de x pour la topologie τ sur X.

Définition 1.4 Soit X un ensemble non vide, une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une base de filtre si :

(1) pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, il existe $C \in \mathcal{B}$ tel que $C \subset A \cap B$,

(2) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

Si X est un ensemble non vide et $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur X, alors :

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \mathcal{B},\ B \subseteq A\}$$

est un filtre sur X appelé le filtre engendré par la base de filtre $\mathcal{B}$.

La continuité d'une fonction est une propriété topologique. En première approche, une fonction f est continue si, à des variations infinitésimales de la variable x, correspondent des variations infinitésimales de l'image $f(x)$. Ceci est naturellement exprimé en termes de voisinages lorsque la fonction f est définie entre deux espaces topolgiques.

Définition 1.5 Soient (X,τ) et (Y,T) deux espaces topologiques, et f une fonction definie de X dans Y. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$, si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_T(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x_0) \text{ tel que } \forall x \in V \Longrightarrow f(x) \in W$$

ou bien :

$$\forall W \in \mathcal{V}_T(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x_0) \text{ tel que } f(V) \subset W$$

ou encore :

$$\forall W \in \mathcal{V}_T(f(x_0)),\ f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_\tau(x_0).$$

où la notation $\mathcal{V}_T$ ou $\mathcal{V}_\tau$ indique le filtre des voisinages par rapport à la topologie correspondante T ou bien τ.
On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Cas particulier, Si f est une fonction numérique d'un espace topologique (X,τ) dans $\mathbb{C}$, alors f est continue en $x_0 \in X$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_\tau(x_0) \text{ tel que } \forall x \in V \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.3 Pour qu'une fonction f d'un espace topologique (X,τ) dans un espace topologique (Y,T) soit continue il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y soit un ouvert dans X.

Démonstration. Soient f une fonction continue de (X,τ) dans (Y,T) et $W \in T$, montrons que $f^{-1}(W) \in \tau$.

Soit $x \in V = f^{-1}(W)$, donc $y = f(x) \in W$. Alors, W est un voisinage ouvert de y, il existe par conséquent un voisinage U_x de x dans X tel que $f(U_x) \subset W$, donc $U_x \subset V$. Autrement dit, pour tout $x \in V$, il existe U_x un voisinage de x dans X contenu dans V, ce qui signifie que V est un ensemble ouvert dans X.

Réciproquement, supposons que $f^{-1}(W) \in \tau$ quelque soit $W \in T$. Considérons un point quelconque x de X et un voisinage quelconque U_y de $y = f(x)$ pour T. Puisque $y \in U_y$, alors $x \in f^{-1}\left(U_y\right)$ et $f^{-1}\left(U_y\right)$ est un voisinage de x pour τ, dont l'image est contenue dans U_y. □

Du fait que l'image réciproque du complémentaire est égale au complémentaire de l'image réciproque, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.4 Pour qu'une fonction f d'un espace topologique (X, τ) dans un espace topologique (Y, T) soit continue il faut et il suffit que l'image réciproque par f de tout ensemble fermé de Y soit un ensemble fermé dans X.

Exemple 1.5

1 Soit X muni de deux topologies τ_1 et τ_2. Alors, l'identié i définie de (X, τ_1) dans (X, τ_2) par $i(x) = x$ est continue si et seulement si $\tau_2 \subset \tau_1$, c'est à dire τ_1 est plus fine que τ_2.

2 Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un espace topologique (X, τ), alors la surjection canonique est continue de (X, τ) dans l'espace topologique quotient $(X/\sim, \widetilde{\tau})$ muni de la topologie quotient $\widetilde{\tau}$.

3 Soit $X = X_1 \times X_2$ muni de la topologie produit de deux espaces topologiques (X_1, τ_1) et (X_2, τ_2), alors les projections $p_j(x_1, x_2) = x_j$, $j = 1, 2$ sont continues.

Définition 1.6 Deux espaces topologiques (X, τ) et (Y, T) sont dit homéomorphes s'il existe une application f bijective et bicontinue de X dans Y (f bijective et continue de X dans Y et l'application réciproque f^{-1} est continue de Y dans X). f est appelée un homéomorphisme.