

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos	vii
1 Introduction	1
1.1 Modélisation d'évolutions par champs de vecteurs et itérations	1
1.2 Équivalences entre systèmes dynamiques	5
1.3 Un survol des propriétés des systèmes dynamiques	8
1.4 Exemples de systèmes dynamiques	12
1.5 Plan du tome 2	18
2 Généricité et transversalité	23
2.1 Germe	23
2.2 Topologie sur les espaces fonctionnels	24
2.2.1 Convergence de classe \mathcal{C}^k sur les ouverts euclidiens	24
2.2.2 Généralisation aux variétés	31
2.3 La notion de généricité	32
2.4 Le lemme fondamental de transversalité	35
2.5 Le théorème de transversalité de Thom	42
2.5.1 Le cas euclidien	42
2.5.2 Formulation générale	45
2.6 Exemples de propriétés génériques	50
2.7 Remarques finales	52
2.7.1 Intérêt et limite du théorème de transversalité	52
2.7.2 Topologie de Whitney	54
2.7.3 Notion de singularité	55
Étude locale des singularités hyperboliques	59
3.1 Points singuliers et points fixes hyperboliques	59
3.2 Champs et difféomorphismes linéaires hyperboliques	62

3.2.1	Champs contractants et contractions hyperboliques	65
3.2.2	Cas général d'un point de selle linéaire	70
3.3	Variétés invariantes locales	73
3.3.1	Variétés invariantes locales pour les difféomorphismes	74
3.3.2	Variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs	78
3.4	Le λ -Lemma de Palis	81
3.4.1	Quelques estimations préalables	83
3.4.2	Suites convergentes	85
3.4.3	Énoncés et preuves du λ -Lemma	88
3.5	Feuilletages invariants locaux	96
3.5.1	Le cas des champs de vecteurs	96
3.5.2	Le cas des difféomorphismes	99
3.6	Linéarisation topologique locale	102
3.7	Variétés invariantes globales	105
4	Systèmes dynamiques structurellement stables	111
4.1	Introduction	111
4.2	Stabilité structurelle locale	112
4.3	Stabilité des champs en dimension 1	116
4.4	Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre 0 . .	118
4.5	Stabilité structurelle des champs sur les surfaces de genre ≥ 1	125
4.5.1	Champs de vecteurs du tore T^2 sans singularités . . .	125
4.5.2	Le cas général	135
4.6	Les systèmes de Morse-Smale généraux	137
4.7	Les ensembles hyperboliques	139
4.7.1	Le fer à cheval de Smale	139
4.7.2	Généralités sur les ensembles hyperboliques	156
4.7.3	Quelques autres exemples de systèmes hyperboliques	159
4.8	Au-delà de la stabilité structurelle	163
4.8.1	Non-généricité de la stabilité structurelle	163
4.8.2	Attracteurs non hyperboliques	165
5	Les bases de la théorie des bifurcations	167
5.1	Introduction	167
5.2	Premiers exemples de bifurcation	167
5.3	Déploiements versels pour les singularités	179
5.4	Réduction à une variété centrale	188
5.4.1	Champs de vecteurs et difféomorphismes	188

5.4.2	Déploiements de champs de vecteurs et de difféomorphismes	189
5.5	Déploiements de type selle-nœud	192
5.5.1	Déploiements de type selle-nœud sur \mathbb{R}	192
5.5.2	Déploiements de type selle-nœud sur \mathbb{R}^2	196
5.6	Formes normales	197
5.6.1	Formes normales pour les champs de vecteurs	198
5.6.2	Formes normales pour les déploiements de champs	205
5.6.3	Formes normales pour les difféomorphismes	206
5.7	Bifurcations de Hopf-Takens	206
5.7.1	Digression sur les homéomorphismes de \mathbb{R}^+	209
5.7.2	Démonstration du théorème 5.14	214
5.7.3	Caractérisation des déploiements versels	217
6	Compléments théorie des bifurcations	225
6.1	Désingularisation	226
6.1.1	Désingularisation des germes de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$	228
6.1.2	Désingularisation des déploiements de champs de vecteurs en $0 \in \mathbb{R}^2$	233
6.2	La bifurcation de Bogdanov-Takens	240
6.3	Déploiements de champs en dimension 2	243
6.3.1	Singularités de codimension ≤ 2	245
6.3.2	Sous-filtrations particulières	246
6.3.3	Singularités de codimension ≤ 3	247
6.4	Déploiements d'orbites périodiques et polycycles	248
6.4.1	Bifurcation des orbites périodiques	250
6.4.2	Connexion de selle de codimension 1	251
6.4.3	Déploiements génériques de polycycles hyperboliques	256
6.4.4	Connexion de selle de codimension quelconque	256
6.4.5	Autres résultats sur les bifurcations de polycycles	258
6.5	Bifurcations globales sur la sphère	260
6.5.1	Le problème de la cyclicité finie	260
6.5.2	Le seizième problème de Hilbert infinitésimal	265
6.5.3	Difficulté d'une théorie de bifurcation globale	271
7	Le système de Lorenz	275
7.1	Les équations de la convection	276
7.2	Formulation et approximation variationnelles	277
7.3	Considérations générales	279

7.4	Hypothèses du modèle et fonctions de base	281
7.4.1	Les conditions limites	282
7.4.2	Construction modale des fonctions ψ et θ	283
7.5	Le modèle de Lorenz	285
7.6	Étude partielle du modèle de Lorenz	287
7.6.1	Propriété de confinement du flot de $X_{a,b,r}$	287
7.6.2	Étude des points singuliers de $X_{a,b,r}$	289
7.6.3	Sous-criticité de la bifurcation de Hopf et comportement du modèle pour $r > r_0$	299

Bibliographie	309
----------------------	------------

Index	315
--------------	------------