Séquence 1 : ALGEBRE PARTIE 1

Objectifs

- **Savoir développer et factoriser une expression littérale**
- **Connaître les identités remarquables**
- **Savoir résoudre des équations de degré 1**
- **Savoir résoudre des équations de degré 2 ou plus grâce à la propriété d'intégrité**
- **Savoir résoudre des équations-produits et des équations-quotients**

Avant de commencer, faire les exercices suivants (Corrections en fin de manuel).

Exercice 1 Entourer en rouge dans la liste ci-dessous tous les termes égaux à x^2 et en vert tous les termes égaux à $2x$.

$x+x$	$x\times x$	$x\times 2$	$3x-x$
$-x^2+2x^2$	$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x$	$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}$

Exercice 2 Simplifier les expressions littérales suivantes :

- $A(x)=3x-4-7x+5$
- $B(x)=4-2x+(3-3x)-(5+2x)$
- $C(x)=-x^2+3x-2+(4x^2-5x+1)$
- $D(x)=(3x)^2-4x^2$
- $E(x)=2\times 3x-x\times(-4)+5x$

Exercice 3 Le nombre -2 est-il solution de l'équation $4x-7=-5x+11$?
Le nombre $\frac{2}{3}$ est-il solution de l'équation $3x+4=-x+\frac{20}{3}$?

Exercice 4 On considère l'expression $E(x)=-3x^2+5x-7$

1) Calculer la valeur de $E(x)$ lorsque $x=-4$.
2) Calculer $E(0)$ et $E\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 5 Traduire chacune des phrases par une expression littérale selon l'exemple suivant : la phrase « La somme de x et de 1 est égale à 4 » s'écrit « $x+1=4$ »

1) Le double de x est égal à -7.
2) Le carré de x est égal à 25.
3) La somme de 2 et de la moitié de x est égale à 6.
4) La moitié de la somme de 2 et de x est égale à 8.
5) Le produit de 2 par la somme de x et de 3 est égal à -4.

Développement et Factorisation d'une expression littérale

Distributivité de la multiplication

Lorsque l'on manipule des égalités, on est souvent amené à réduire (ou simplifier) des expressions littérales grâce à une propriété appelée :

« **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition** »

Pour tous nombres a, b et c on a : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Dans cette propriété :

- $a \times (b + c)$ est le **produit** des deux **facteurs** a et $(b + c)$
- $a \times b + a \times c$ est la **somme** des deux termes $a \times b$ et $a \times c$

On la note plus simplement : $a(b + c) = ab + ac$

On définit de la même façon la « **Distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction** » : $a(b - c) = ab - ac$

Développer et Factoriser

Transformer un produit en une somme (ou une soustraction) s'appelle **Développer** :

$$a(b + c) \longrightarrow ab + ac$$

Transformer une somme (ou une différence) en un produit s'appelle **Factoriser** :

$$ab + ac \longrightarrow \boldsymbol{a}(b + c)$$

a s'appelle le **facteur commun**

Propriété de Double distributivité

On appelle propriété de « **Double distributivité de la multiplication par rapport à l'addition** » la propriété suivante :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Dans cette propriété, les additions peuvent être remplacées par des soustractions :

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Exercice résolu 1 Développer les expressions suivantes :

$A = 5(2+3x) \qquad B = x(4x-5) \qquad C = -2x(-3+4x)$

Solution

$A = 5(2+3x) = 5 \times 2 + 5 \times 3x = 10 + 15x$

$B = x(4x-5) = x \times 4x - x \times 5 = 4x^2 - 5x$

$C = -2x(-3+4x) = (-2x) \times (-3) + (-2x) \times 4x = 6x - 8x^2$

Exercice résolu 2 Factoriser les expressions suivantes :

$A = 10x + 15 \qquad B = x^2 + 3x \qquad C = 15x^2 - 6x$

Solution

On commence par mettre en évidence le facteur commun :

$$A = 10x + 15 = \mathbf{5} \times 2x + \mathbf{5} \times 3$$

On procède à la factorisation : $A = \mathbf{5} \times (2x+3) = \mathbf{5}(2x+3)$

On procède de la même façon pour B et C :

$$B = x^2 + 3x = x \times \boldsymbol{x} + 3 \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(x+3)$$

$$C = 15x^2 - 6x = \mathbf{3}\boldsymbol{x} \times 5x - 2 \times \mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}(5x-2)$$

Exercice résolu 3 Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide de la double distributivité :

$A = (2+3x)(x+4) \qquad B = (x-2)(4x+5) \qquad C = (1-2x)(3x-5)$

$D = 3x(x-1) - (x+1)(2x-1)$

Solution

On développe l'expression $A = (2+3x)(x+4)$ grâce à la première propriété de double distributivité $\quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

On a :

$A = 2 \times x + 2 \times 4 + 3x \times x + 3x \times 4$

$A = 2x + 8 + 3x^2 + 12x$ \`

Puis on <u>réduit</u> (on <u>simplifie</u>) l'expression d'où : $A = 3x^2 + 14x + 8$

On procède de la même façon pour $B = (x-2)(4x+5)$

D'après la 2ème propriété $\quad (a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$

on a :

$B = x \times 4x + x \times 5 - 2 \times 4x - 2 \times 5$

$B = 4x^2 + 5x - 8x - 10$

$B = 4x^2 - 3x - 10$

Pour $C = (1 - 2x)(3x - 5)$
D'après la 4ème propriété $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
on a :

$$C = 1 \times 3x - 1 \times 5 - 2x \times 3x + 2x \times 5$$
$$C = 3x - 5 - 6x^2 + 10x$$
$$C = -6x^2 + 13x - 5$$

Pour $D = 3x(x - 1) - (x + 1)(2x - 1)$
On développe séparément $3x(x - 1)$ et $(x + 1)(2x - 1)$:

- $3x(x - 1) = \mathbf{3x^2 - 3x}$
- Grâce à la 3ème propriété $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$ on a :
  $(x + 1)(2x - 1) = x \times 2x - x \times 1 + 1 \times 2x - 1 \times 1$
  D'où : $(x + 1)(2x - 1) = 2x^2 - x + 2x - 1 = \mathbf{2x^2 + x - 1}$

On remplace ces expressions dans D : $D = 3x^2 - 3x - (2x^2 + x - 1)$
On supprime les parenthèses : $D = 3x^2 - 3x - 2x^2 - x + 1$
On réduit et on obtient finalement : $D = x^2 - 4x + 1$

Exercice résolu 4 Factoriser les expressions suivantes :

$A = (x+3)(x+4) + 6(x+4)$ $\qquad$ $B = (x-2)(4x+5) - (2x+1)(x-2)$

Solution
Pour $A = (x + 3)(x + 4) + 6(x + 4)$
On met le facteur commun en évidence : $A = (x + 3)(\boldsymbol{x + 4}) + 6(\boldsymbol{x + 4})$
On procède à la factorisation : $A = (\boldsymbol{x + 4})[(x + 3) + 6]$
On réduit le second facteur : $A = (x + 4)(x + 9)$

On procède de la même façon pour B :
$B = (\boldsymbol{x - 2})(4x + 5) - (2x + 1)(\boldsymbol{x - 2})$
$B = (\boldsymbol{x - 2})[(4x + 5) - (2x + 1)]$
$B = (\boldsymbol{x - 2})(4x + 5 - 2x - 1)$
D'où $B = (\boldsymbol{x - 2})(2x + 4)$

Exercices d’auto-apprentissage

Exercice 1 Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = -4(-2x+3)$
$B = 3x(5-2x)$
$C = (4x+2)(1+2x)$
$D = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)(3x+4)$
$E = (4-x)(x-3)$
$F = (5x-4)(5x+4)$
$G = (x^2-3)(5x-1)$

Exercice 2 Développer et réduire les expressions suivantes :

Voir exercice résolu 3 (développement de D).

$A = (-2x+1)(x+3) + 5x(3x-2)$
$B = 3x(2x-7) + (x+4)(2-4x)$
$C = (x+1)(4x-5) - (x-2)(3x+2)$

Exercice 3 Factoriser les expressions suivantes :

$A = 4x^2 - 8x$
$B = 3x + x^2$
$C = x(x+3) - x(2x-1)$
$D = (2+x)(x-1) + 5(2+x)$
$E = (x+4)(4-2x) + (x-3)(x+4)$
$F = (2x+5)^2 - (2x+5)(x-3)$

Remarquer que $(2x+5)^2 = (2x+5)(2x+5)$.

$G = (7x+1) - (1-2x)(7x+1)$
$H = (2x-3)(5+x) + (-3+2x)(x-6)$
$I = 4x - 6 - (2x-3)(x+4)$

Remarquer que $(4x-6) = 2(2x-3)$.

$J = (x+9)(x-5) + x(6x-30)$

Exercice 4 On considère l’expression

$$E(x) = (4x+1)(x-2) - (x-2)(2x+3)$$

1) Développer et réduire $E(x)$.
2) Factoriser $E(x)$.

Chercher un facteur commun dans l’expression non développée de $E(x)$.

3) Utiliser la forme de $E(x)$ la plus adaptée (soit la forme développée, soit la forme factorisée) pour calculer rapidement les valeurs suivantes :

$E(0)$ $\qquad$ $E(2)$ $\qquad$ $E(1)$

Développer et Factoriser à l'aide des identités remarquables

Identités remarquables
On appelle **identités remarquables** les propriétés suivantes : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ Ces égalités peuvent être démontrées facilement (voir exercice d'auto-apprentissage 1) et elles servent à développer ou factoriser certaines expressions littérales.

Exercice résolu 1 Développer les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$A = (2x+3)^2$ $\quad B = (4x-3)^2$ $\quad C = (3x-4)(3x+4)$

Solution

Pour A, on utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$ d'où $A = 4x^2 + 12x + 9$

Pour B, on utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 3$:

$B = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$ d'où $B = 16x^2 - 24x + 9$

Pour C, on utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 4$:

$C = (3x)^2 - 4^2$ d'où $C = 9x^2 - 16$

Exercice résolu 2 Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$A = 4x^2 + 28x + 49$ $\quad B = 25x^2 - 20x + 4$ $\quad C = 16x^2 - 81$

Solution

Pour A : on remarque que $A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 7 + 7^2$
On retrouve l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ avec $a = 2x$ et $b = 7$
D'où $A = (2x+7)^2$

Pour B : on remarque que $B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$
On retrouve l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$
D'où $B = (5x-2)^2$

Pour C : on remarque que $C = (4x)^2 - 9^2$
On retrouve l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 4x$ et $b = 9$
D'où $C = (4x-9)(4x+9)$

Exercices d'auto-apprentissage

Exercice 1 Développer $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$ à l'aide de la propriété de double distributivité afin de démontrer les 3 identités remarquables.

Il faut remarquer que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis développer le produit.

Exercice 2 Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$A = (x+3)^2$

$B = (3x-4)^2$

$C = (3-5x)^2$

$D = (-x+4)^2$

$E = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2$

$F = (-2x-3)^2$

$G = \left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{3}\right)$

$H = (5+3x)(5-3x)$

Exercice 3 Compléter les égalités suivantes à l'aide des identités remarquables :

$(x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 49$

$(2x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 25$

$(\ldots + \ldots)^2 = x^2 + 6x + \ldots$

$(\ldots - 1)^2 = \ldots - 4x + \ldots$

$(3x+2)(\ldots\ldots) = 9x^2 - \ldots$

$(7 - \ldots)(\ldots\ldots) = 49 - 4x^2$

Exercice 4 Factoriser les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

$A = x^2 + 10x + 25$

$B = 4x^2 - 12x + 9$

$C = x^2 - 9$

$D = 25x^2 - 49$

$E = 4x^2 - 7$ $\quad$ $7 = \left(\sqrt{7}\right)^2$

$F = 121 - 16x^2$

$G = (2x+3)^2 - 49$

Remarquer que $G = (2x+3)^2 - 7^2$ puis utiliser $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$H = 36x^2 - (2x-5)^2$

$I = (3x-1)^2 - (2+x)^2$

Exercice 5 On considère l'expression $E(x) = (x+1)(x+2) - (3x-2)^2$.

1) Développer $(x+1)(x+2)$.
2) Développer $(3x-2)^2$.
3) En déduire le développement de $E(x)$.

Exercice 6 Développer et réduire les expressions suivantes **:**

$A = (2x+5)^2 + (3x-2)(4+x)$
$B = (2-5x)(3x+1) - (4x+3)^2$
$C = (5-2x)^2 - (3-x)(x+2)$
$D = (3-2x)(3+2x) - x(4x-5)$
$E = (x+3)^2(x-1)$ ✋ Développer d'abord $(x+3)^2$ puis E.

Exercice 7 Factoriser les expressions suivantes :

$A = 18x^2 + 24x + 8$
✋ Factoriser A par 2 puis utiliser une identité remarquable.

$B = 12x^2 - 12x + 3$
$C = x^2 + 6x + 9 + (4x-1)(x+3)$
✋ Factoriser $x^2 + 6x + 9$ puis C.

$D = (2x-3)(4x+1) + 4x^2 - 12x + 9$
$E = 3x(2x-5) + 4x^2 - 25$
✋ Factoriser $4x^2 - 25$ puis E.

$F = 3(x-1)^2 + 2x - 2$
$G = 8x^2 - 32 + (x+2)(3x-1)$

Exercice 8 Développer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.
✋ $(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b)$ et $(a-b)^3 = (a-b)^2 \times (a-b)$