Chapitre I

ESPACES NORMÉS

Dans ce chapitre d'introduction, on donnera quelques généralités sur les espaces normés abstraits, avec des exemples, et on traitera le cas des espaces de dimension finie. C'est essentiellement un rappel des cours de Licence. Ce sera aussi l'occasion de fixer certaines notations.

I.1. Espaces vectoriels normés

I.1.1. Norme

Définition I.1.1. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une* **norme** *sur E est une application, le plus souvent notée $\| \,.\, \|$:*

$$\| \,.\, \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1) *a)* $\|x\| \geqslant 0$ *pour tout* $x \in E$ *et b)* $\boxed{\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0}$ *;*

2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|}$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité) *;*

3) $\boxed{\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$, $\forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le 1) b), on dit que $\| \,.\, \|$ est une *semi-norme*. Notons qu'alors 2) entraîne néanmoins que $\|0\| = 0$.

À partir d'une norme, on obtient une <u>distance</u> sur E en posant $\boxed{d(x, y) = \|x - y\|}$. On définit alors les :

- <u>boules ouvertes</u> : $\overset{\circ}{B}(x, r) = \{y \in E \,;\; \|x - y\| < r\}$;
- <u>boules fermées</u> : $B(x, r) = \{y \in E \,;\; \|x - y\| \leqslant r\}$,

ce qui permet de définir une *topologie* sur E ; une partie A de E est *ouverte* (et on dit aussi que A est *un ouvert* de E) si pour tout $x \in A$ il existe une boule centrée en x, de rayon $\underline{r = r_x > 0}$, contenue dans A. Il n'y a pas besoin de préciser s'il s'agit d'une boule ouverte ou d'une boule fermée. En effet, si A contient la boule fermée $B(x, r)$, elle contient *a fortiori* la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$; et, inversement, si A contient la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$, elle contient la boule fermée $B(x, r')$, pour tout $r' < r$. Notons que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert (puisqu'il n'y a aucun x dans A, la propriété définissant les ouverts est trivialement vérifiée). L'espace E tout entier est clairement un ouvert. Il résulte de la définition que toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : si $x \in A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, et $\overset{\circ}{B}(x, r_k) \subseteq A_k$, alors $\overset{\circ}{B}(x, r) \subseteq A$, avec $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$.

Une partie V contenant le point $x_0 \in E$ est un *voisinage* de x_0 si elle contient une boule (ouverte ou fermée) de centre x_0, de rayon $\underline{r > 0}$.

Une partie est *fermée* (on dit aussi que c'est *un fermé*) si son complémentaire est ouvert. Par complémentation, on obtient que $\emptyset$ et E sont des fermés, que l'intersection de toute famille de fermés est encore un fermé, ainsi que toute réunion d'un nombre fini de fermés.

Si $A \subseteq E$ est une partie de E, on appelle *intérieur* de A, et on note $\overset{\circ}{A}$, ou $\mathrm{int}\,(A)$, le plus grand ouvert contenu dans A (c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A), et on appelle *adhérence*, ou *fermeture*, de A le plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection de tous les fermés contenant A). On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. On rappelle (c'est facile à voir) que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x. On dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Proposition I.1.2. *Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Preuve. 1) Soit $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < r_0 - \|x - x_0\| > 0$. Pour $\|x - y\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| \leqslant r + \|x - x_0\| < r_0$; donc $B(x, r) \subseteq \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$.

2) Soit $x \notin B(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < \|x - x_0\| - r_0$; alors $B(x, r) \subseteq [B(x_0, r_0)]^c$, puisque, si $\|y - x\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \geqslant \|x_0 - x\| - \|x - y\| \geqslant \|x_0 - x\| - r > r_0$. □

Toutes les notions topologiques précédentes ne font pas intervenir le fait que E soit un espace vectoriel, ni que la distance est définie à partir d'une norme ; elles sont donc valables dans tout espace métrique. Par contre, on a une propriété spécifique dans les espaces normés, qui justifie la notation des boules ouvertes : l'intérieur de $B(x, r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x, r)$ est la boule fermée $B(x, r)$ (voir ci-dessous).

Définition I.1.3. *Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un* espace vectoriel normé*, ou, plus simplement, un* espace normé.

Notation. On notera par B_E la boule fermée $B(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1. On dira que c'est la **boule unité** de E.

Proposition I.1.4. *Si E est un espace normé, alors les applications :*

$$+: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \textit{et} \qquad .: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

Définition I.1.5. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, muni d'une topologie. On dit que E est un* espace vectoriel topologique (e.v.t.) *si les applications :*

$$+: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \textit{et} \qquad .: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel topologique localement convexe, *ou* espace localement convexe (e.l.c.), *si tout point possède une base de voisinages convexes.*

Il résulte de la Proposition I.1.4, et du fait que les boules sont convexes, que tout espace normé est un *e.v.t.* localement convexe.

Preuve de la Proposition I.1.4. $E\times E$ et $\mathbb{K}\times E$ sont munis de la topologie-produit, qui peut être définie par les normes :

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \qquad \text{et} \qquad \|(\lambda,x)\| = \max\{|\lambda|,\|x\|\}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser les inégalités :

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| = \|(x-x_0)+(y-y_0)\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\|\,;$$

et :

$$\begin{aligned} \|\lambda x-\lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)+\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0\| \\ &\leqslant |\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|. \end{aligned} \qquad \square$$

Corollaire I.1.6. *Les translations :*

$$\tau_a: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \qquad (a\in E)$$

et les homothéties :

$$h_\lambda: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \qquad (\lambda\in\mathbb{K})$$

sont continues. Ce sont des homéomorphismes (si $\lambda\neq 0$ pour les homothéties).

Corollaire I.1.7. *Toutes les boules fermées de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles, donc à B_E. Toutes les boules ouvertes de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles.*

Corollaire I.1.8. *L'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ est la boule fermée $B(x,r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B(x,r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$.*

Preuve. 1) L'adhérence de la boule ouverte est évidemment contenue dans la boule fermée, puisque celle-ci est fermée dans E. Inversement, si $y \in B(x,r)$, on a $y_n = \frac{1}{n}x + \big(1-\frac{1}{n}\big)y \in \overset{\circ}{B}(x,r)$ car $\big\|x - \big[\frac{1}{n}x + \big(1-\frac{1}{n}\big)y\big]\big\| = \big(1-\frac{1}{n}\big)\,\|x-y\| < r$; comme $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, on obtient $y \in \overline{\overset{\circ}{B}(x,r)}$.

2) Étant ouverte dans E, la boule ouverte est contenue dans l'intérieur de la boule fermée. Pour montrer l'inclusion inverse, il faut montrer que si y n'est pas dans la boule ouverte, alors aucune boule $B(y,\rho)$ de centre y et de rayon $\rho > 0$ n'est contenue dans $B(x,r)$. Or si $y \notin \overset{\circ}{B}(x,r)$, on a $\|y-x\| \geqslant r$. Pour tout $\rho > 0$, le vecteur $z = y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x)$ est dans $B(y,\rho)$, puisque $\|z-y\| = \frac{\rho}{\|y-x\|}\,\|y-x\| = \rho$, mais n'est pas dans $B(x,r)$, car $\|z-x\| = \big\|y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x) - x\big\| = \big(1 + \frac{\rho}{\|y-x\|}\big)\,\|y-x\| \geqslant \big(1+\frac{\rho}{\|y-x\|}\big)\, r > r$. Donc y n'est pas dans l'intérieur de $B(x,r)$. □

Corollaire I.1.9. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors son adhérence $\overline{F}$ aussi.*

Preuve. Soit $x, y \in \overline{F}$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Il existe $x_n, y_n \in F$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Par la Proposition I.1.4, on a $ax+by = \lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n)$; et comme $ax_n + by_n \in F$, on obtient $ax + by \in \overline{F}$. □

Proposition I.1.10. *L'application $x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ est continue.*

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x-y\|$. □

I.1.2. Quelques exemples usuels

I.1.2.1. Espaces de suites

1) a) Il est immédiat de voir que si l'on pose, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{cases} \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,; \\ \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,, \end{cases}$$

alors $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

On note $\ell_1^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_1)$ et $\ell_\infty^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty)$.

b) Si p est un nombre réel vérifiant $1 < p < \infty$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}}\,.$$

On note $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_p)$.

Seule l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{1/p}}\,,$$

appelée **inégalité de Minkowski**, n'est pas évidente ; elle peut se démontrer ainsi : Par convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p$, on a $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $u, v \geqslant 0$. Prenons $\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$ (de sorte que $1 - \alpha = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$), $u = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $v = \frac{|y_k|}{\|y\|_p}$ (si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_p = 0$, le résultat est évident). En sommant, on obtient $\frac{1}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \leqslant 1$, ce qui donne le résultat, puisque $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. □

Une inégalité *très utile* est l'**inégalité de Hölder**. Rappelons que si $1 < p < \infty$, l'**exposant conjugué** de p est le nombre q vérifiant $\boxed{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1}$. Explicitement, $\boxed{q = \dfrac{p}{p-1}}$. On a $1 < q < \infty$, et p est l'exposant conjugué de q. Ils sont aussi liés par l'égalité $\boxed{(p-1)(q-1) = 1}$.

L'inégalité de Hölder s'énonce alors ainsi : si $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p, alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{1/q}},$$

Lorsque $p = 2$, alors $q = 2$: c'est l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** (due, sous cette forme, à Cauchy en 1821).

Pour montrer l'inégalité de Hölder, on part de l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, pour $a, b \geqslant 0$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p/p$ et du fait que sa dérivée $t \mapsto t^{p-1}$ est la réciproque de la dérivée $t \mapsto t^{q-1}$ de $t \mapsto t^q/q$, comme on peur s'en convaincre en faisant un dessin ; mais on peut le voir aussi simplement, par exemple en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt$) ; on l'applique avec $a = |x_k|/\|x\|_p$ et $b = |y_k|/\|y\|_q$ (on peut supposer $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$), et on somme. On obtient $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où l'inégalité de Hölder. □

2) Ces exemples se généralisent en dimension infinie.

a) Soit :

$$\boxed{c_0 = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \,;\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}},$$

et :

$$\boxed{\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \,;\ (x_n)_n \text{ soit bornée}\}};$$

on les munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |x_n|}.$$

b) Pour $1 \leqslant p < \infty$, on pose :

$$\boxed{\ell_p = \Big\{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \,;\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\Big\}};$$

on le munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}}.$$

Le fait que ℓ_p soit un sous-espace vectoriel de l'espace des suites, et que $\| \,.\, \|_p$ soit une norme sur ℓ_p se déduit de l'inégalité de Minkowski (évidente lorsque $p = 1$), généralisée comme suit :

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\Big)^{1/p},$$

pour tous $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{K}$. On l'obtient à partir de la précédente en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini : pour tout $N \geqslant 1$, on a $\big(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\big)^{1/p}$.

L'inégalité de Hölder se généralise de la même façon. Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\Big)^{1/q}.$$

En particulier, lorsque $x = (x_n)_n \in \ell_p$ et $y = (y_n)_n \in \ell_q$, on a $xy \in \ell_1$ et $\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$.

Les espaces ℓ_p sont en fait des cas particuliers des espaces de Lebesgue $L^p(m)$, dont nous rappellerons la définition ci-dessous, correspondant à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

I.1.2.2. Espaces de fonctions

1) a) Soit A un ensemble et soit l'espace $\mathscr{F}_b(A)$ l'espace (que l'on note aussi $\ell_\infty(A)$ si l'on veut privilégier l'aspect "famille d'éléments") des fonctions bornées sur A, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|},$$

on a une norme, appelée *norme uniforme*. La topologie associée à cette norme est la *topologie de la convergence uniforme* ; en effet, il est clair que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f.

b) Soit K un espace compact et $\boxed{\mathscr{C}(K)}$ l'espace des fonctions continues sur K (à valeurs scalaires). Toute fonction continue sur un compact étant bornée, $\mathscr{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}_b(K)$. On le munit usuellement de la norme induite $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

Notons que, lorsque $K = [0,1]$, par exemple, on peut aussi munir $\mathscr{C}([0,1])$ de la norme définie par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt\,,$$

qui vérifie $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

c) Sur l'espace $\mathscr{C}^k([0,1])$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[0,1]$, on peut mettre la norme :

$$\|f\|^{(k)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}\,.$$

2) *Les espaces de Lebesgue.*

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré ; pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $\boxed{\mathscr{L}^p(m)}$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f\colon S \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_S |f(t)|^p\, dm(t) < +\infty,$$

et l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_p = \bigg(\int_S f(t)|^p\, dm(t)\bigg)^{1/p}}\,.$$

Notons que $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout.

Théorème I.1.11 (Inégalité de Minkowski). *Soit $1 \leqslant p < \infty$. Pour $f, g \in \mathscr{L}^p(m)$, on a l'***inégalité de Minkowski** *:*

$$\boxed{\bigg(\int_S |f+g|^p\, dm\bigg)^{1/p} \leqslant \bigg(\int_S |f|^p\, dm\bigg)^{1/p} + \bigg(\int_S |g|^p\, dm\bigg)^{1/p}}$$

Il en résulte que $\mathscr{L}^p(m)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et que $\|\,.\,\|_p$ est une *semi-norme* sur $\mathscr{L}^p(m)$. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente.

Preuve. La preuve est la même que pour les suites. On se place dans le cas $p > 1$. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$ (car sinon $f = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = g$ *m-p.p.*, ou $g = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = f$ *m-p.p.*). On applique l'inégalité de convexité $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ avec $\alpha = \|f\|_p/(\|f\|_p + \|g\|_p) \in [0,1]$, $u = |f(t)|/\|f\|_p$ et $v = |g(t)|/\|g\|_p$. Comme $\alpha/\|f\|_p = (1-\alpha)/\|g\|_p = 1/(\|f\|_p + \|g\|_p)$, on a $\Big(\dfrac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p}\Big)^p \leqslant \dfrac{\alpha}{\|f\|_p^p}\, |f(t)|^p + \dfrac{1-\alpha}{\|g\|_p^p}\, |g(t)|^p$, d'où, en intégrant :

$$\begin{aligned}\int_S \frac{(|f(t)| + |g(t)|)^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p}\, dm(t) &\leqslant \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \int_S |f(t)|^p\, dm(t) + \frac{1-\alpha}{\|g\|_p^p} \int_S |g(t)|^p\, dm(t)\\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\,;\end{aligned}$$

cela donne le résultat puisque $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. $\square$

On a vu que $\| \, . \, \|_p$ n'est pas une norme en général, puisque $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout. Si $\mathscr{N}$ désigne l'espace des fonctions mesurables $f\colon S \to \mathbb{K}$ nulles m-presque partout, l'espace-quotient $\boxed{L^p(m) = \mathscr{L}^p(m)/\mathscr{N}}$ est alors normé si l'on pose $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$ (voir l'Exercice 15).

Dans la pratique, on ne fera pas de distinction entre la fonction f et sa classe d'équivalence m-presque partout $\widetilde{f}$, et on écrira donc $f \in L^p(m)$ au lieu de $f \in \mathscr{L}^p(m)$. Toutefois, il faut parfois faire attention, notamment lorsque l'on manipule des quantités non dénombrables de fonctions. Cette distinction peut déjà intervenir pour des questions de mesurabilité. On peut aussi le voir sur l'exemple suivant :

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $[0,1]$; pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a, relativement à la mesure de Lebesgue, $\mathbb{1}_A = 0$ *p.p.* ; donc $\widetilde{\mathbb{1}_A} = \widetilde{0}$. Mais, d'un autre côté, $\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{1}_A(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$; donc $(\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{1}_A)^{\sim} = \widetilde{\mathbb{1}}$.

Comme pour les suites, l'inégalité de Hölder est *très utile*.

Théorème I.1.12 (Inégalité de Hölder)**.** *Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a, pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$ et $g \in \mathscr{L}^q(m)$, l'***inégalité de Hölder***:*

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^p\,dm\right)^{1/p} \left(\int_S |g|^q\,dm\right)^{1/q}}\,.$$

Pour $p = q = 2$, on l'appelle **inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^2\,dm\right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2\,dm\right)^{1/2}}\,,$$

si $f, g \in \mathscr{L}^2(m)$ (elle a été démontrée par Bouniakowski en 1859 et redémontrée par Schwarz en 1885 ; elle généralise l'inégalité pour les sommes démontrée par Cauchy). Elle se démontre de la même façon que pour les sommes, en intégrant au lieu de sommer.

Preuve. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$ car sinon $f = 0$ *m-p.p.* ou $g = 0$ *m-p.p.*, et alors $fg = 0$ *m-p.p.*. On utilise l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec $a = |f(t)|/\|f\|_p$ et $b = |g(t)|/\|g\|_q$. En intégrant, on obtient :

$$\int_S \frac{|f(t)\,g(t)|}{\|f\|_p \|g\|_q}\,dm(t) \leqslant \frac{1}{p}\int_S \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}\,dm(t) + \frac{1}{q}\int_S \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}\,dm(t) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

d'où le résultat. □

Comme application on a le résultat suivant.

Proposition I.1.13. *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré de mesure finie. Alors, pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, on a $\mathscr{L}^{p_2}(m) \subseteq \mathscr{L}^{p_1}(m) \subseteq \mathscr{L}^1(m)$. De plus si $m(S) = 1$ (c'est-à-dire que m est une mesure de probabilité), alors $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$ pour toute $f \in \mathscr{L}^{p_2}(m)$.*