CHAPITRE I

ELEMENTS D'ELECTROSTATIQUE

L'électrostatique est l'étude et la modélisation mathématique des phénomènes statiques s'expliquant par l'attribution d'une charge électrique à la matière. Le mot statique indique que l'étude a lieu en régime permanent (ou lentement variable). Le temps n'intervient donc pas. Toute l'électrostatique repose sur des postulats. Ici on étudie les phénomènes simples ayant une application courante telle que le condensateur. Les notions mathématiques pré-requises pour ce chapitre sont rappelées en annexe au chapitre VI.

1. POSTULATS

La matière comporte des particules élémentaires caractérisées par :

- une masse m
- une charge électrique q

Ces paramètres donnent lieu à des forces qui s'exercent à distance. On peut mesurer ces forces ce qui étaye le postulat.

Loi de Newton : attraction gravitationnelle

Soient deux masses ponctuelles, m_1 située au point A_1 et m_2 située au point A_2. Il existe une force d'attraction (les masses négatives n'existent pas selon nos connaissances actuelles) entre ces deux masses.

La force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 est :

$$\vec{F} = -G.\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{u} \text{ avec } r = A_1.A_2 \text{ et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1.A_2}}{A_1.A_2} \text{ (vecteur unitaire de } A_1 \text{ vers } A_2\text{)}$$

$G \approx 6{,}67\ 10^{-11}\ SI$, Les masses sont en kilogrammes (*kg)* et les distances en mètres (*m)*.

Loi de Coulomb : force électrostatique

Soient deux charges électriques ponctuelles, q_1 située au point A_1 et q_2 située au point A_2. Il existe une force d'attraction ou de répulsion (la charge peut être positive ou négative) entre ces deux charges.

Dans le vide la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 est (cf. figure 1) :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{u}} \text{ avec } r = A_1.A_2 \text{ et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1.A_2}}{A_1.A_2} \text{ (vecteur unitaire de } A_1 \text{ vers } A_2\text{)}$$

et la charge q_2 exerce la force opposée sur la charge q_1

Deux charges de même signe se repoussent, deux charges de signes opposés s'attirent.

$\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0} = 9\ 10^9$ dans le systèmes d'unité international. Les charges s'expriment en coulomb (C) et les distance en mètres.

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36.\pi.10^9}$ est nommé permittivité diélectrique du vide et s'exprime en farad par mètre (F/m) dans le système international.

Toutes les charges électriques sont multiples de $q_e = -1{,}6\ 10^{-19}\ C$ qui est la charge d'un électron.

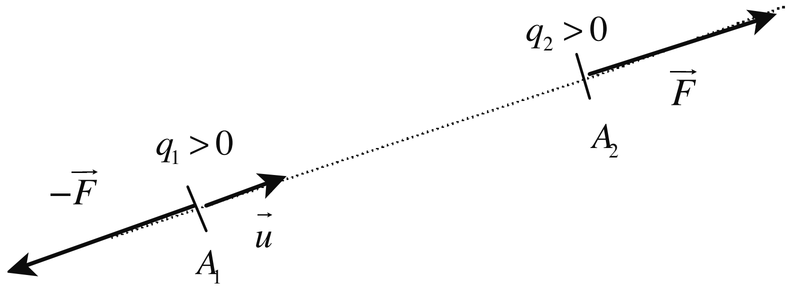

figure 1

2. LE CHAMP ELECTRIQUE

2.1 Définition du champ électrique

Soit une répartition de N charges q_i ($1 \le i \le N$). Chaque charge q_i est placée au point A_i et une autre charge q est placée au point M (cf. figure 2).

La force exercée sur la charge q par la charge q_i placée au point A_i est $\vec{F_i} = \dfrac{1}{4.\pi.\varepsilon_0} \dfrac{q_i.q}{(A_i.M)^2} \dfrac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$.

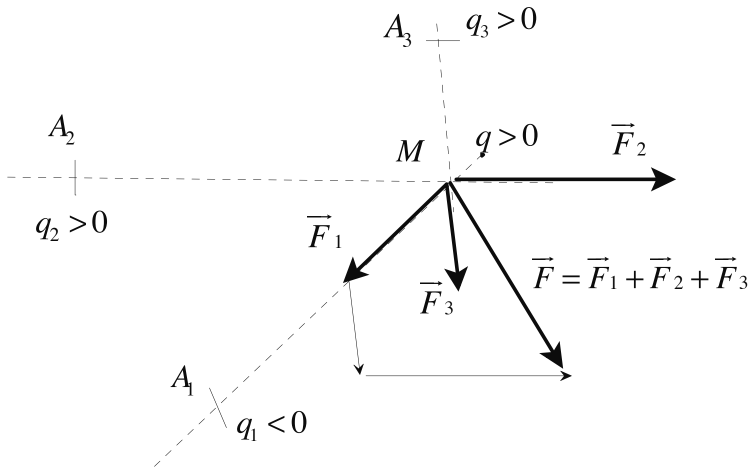

figure 2

La force totale exercée sur la charge q est la somme de toutes les forces exercées par chaque charge : $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_i.q}{(A_i.M)^2} \dfrac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M} = q.\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_i.}{(A_i.M)^2} \dfrac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$

On définit le vecteur: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_i.}{(A_i.M)^2} \dfrac{\overrightarrow{A_i.M}}{A_i.M}$

$\vec{E}$ est le champ électrique crée au point M par la répartition de charge. La force exercée sur la charge q est $\boxed{\vec{F} = q.\vec{E}}$

F est en newton (N)
q en coulomb (C)
E en volt par mètre (V/m)

Le champ électrique $\vec{E}$ caractérise l'influence de toutes les charges qui ont un effet sur la charge q.

2.2 Le théorème de Gauss dans le vide

Soit une charge q placée au point O. Le champ électrique crée au point M distant de $r = OM$ est radial et représenté facilement à l'aide des coordonnées sphériques $\vec{E} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$. (cf. figure 3)

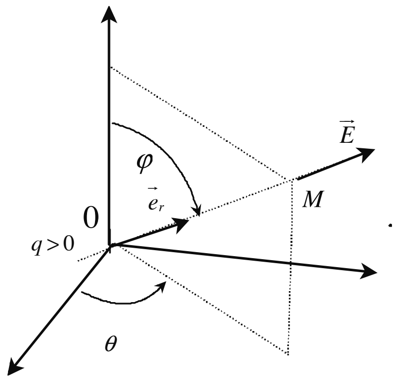

figure 3

Soit une sphère de centre O et de rayon r, on veut calculer la quantité $\oiint_{Sphère} \vec{E}.\vec{dS}$ nommé « flux » (cf. annexe du chapitre VI pour la définition du flux). En tout point M de cette sphère le champ $\vec{E}$ est radial et donc orthogonal à la surface, $\vec{E} = E.\vec{e}_r$. Le module $E = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ est constant en tout point de la sphère. Par définition le vecteur surface pour un élément de surface de la sphère est $\vec{dS} = dS.\vec{e}_r$. Ainsi en tout point de la sphère $\vec{E}.\vec{dS} = E.dS$

➔ $\oiint_{Sphère} \vec{E}.\vec{dS} = \oiint_{Sphère} E.dS = E \oiint_{Sphère} dS = E.4\pi.r^2$ (La surface de la sphère est $\oiint_{Sphère} dS = 4\pi.r^2$)

Soit $\oiint_{Sphère} \vec{E}.\vec{dS} = E.4\pi.r^2 = \frac{q.4\pi.r^2}{4\pi.\varepsilon_0.r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Le flux total est lié uniquement à la charge placée au centre de la sphère. On admet sans démonstration que ce résultat peut se généraliser sous la forme suivante :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée ne dépend que de la charge Q_{int} située à l'intérieur de cette surface fermée.

$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ c'est **le théorème de Gauss**

Les **lignes de champ** électrique sont des courbes où en tout point de la courbe, la tangente est parallèle au champ électrique. Les lignes de champs sont orientées et vont donc des charges positives vers les charges négatives.
Dans une zone de l'espace dépourvue de charges le flux est conservatif (le flux entrant et le flux sortant d'une surface fermée sont égaux).

On observe sur la figure 4 que le flux du champ électrique sur la surface fermée S_1 qui entoure les charges positives est forcément positif car le champ électrique est toujours sortant en tout point de la surface S_1. Inversement le flux du champ électrique sur la surface fermée S_2 qui entoure les charges positives est forcément négatif car le champ électrique est toujours entrant en tout point de la surface S_2. Et le flux du champ électrique sur la surface fermée S_3 qui n'enferme aucune charge est nul. Il existe des points de S_3 où le champ électrique est sortant et d'autre où le champ électrique est entrant.

Le théorème de gauss permet de déterminer le module du champ électrique à partir de la répartition des charges pour cela il faut choisir une surface fermée telle que :

- en chaque point de la surface, $\vec{E}$ est tangent ou orthogonal à la surface
- le module du champ doit avoir la même valeur en tout point de la surface où il est orthogonal.

Les symétries des problèmes étudiés doivent permettre de trouver de telles surfaces sinon le calcul est fastidieux.

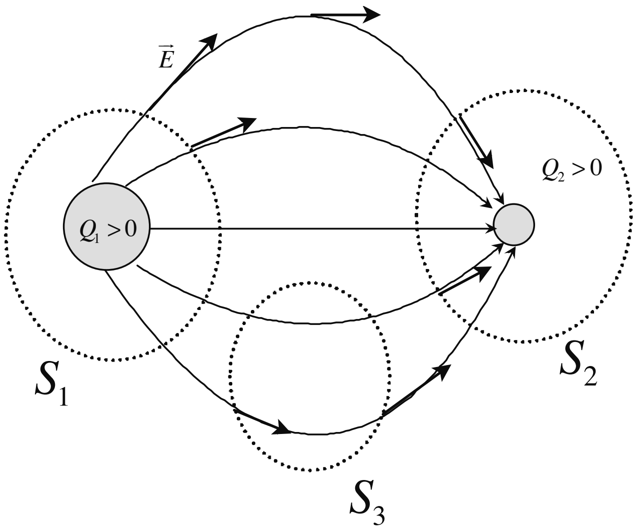

figure 4

3. LE POTENTIEL ELECTRIQUE

3.1 Potentiel d'une charge unique

Soit une charge q placée au point O. Le champ électrique crée au point M est $\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e_r}$ (cf. figure 3).

Ce champ est radial et représenté facilement à l'aide des coordonnées sphériques (cf. figure 3), il est indépendant des coordonnées φ et θ, donc dans ce cas $\frac{\partial}{\partial\theta} \equiv 0$ et $\frac{\partial}{\partial\varphi} \equiv 0$

On note que $\frac{1}{r^2} = -\frac{d[\frac{1}{r}]}{dr}$ ainsi $\vec{E} = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e_r}$ s'écrit $\vec{E} = -\frac{d}{dr}[\frac{q}{4\pi.\varepsilon_0.r}].\vec{e_r}$

Si on pose $V = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0.r}$ on a $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$

En coordonnées sphériques, le gradient s'exprime (cf. annexe) :

$$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}.\vec{e_r} + \frac{1}{r.\sin(\varphi)}\frac{\partial V}{\partial\theta}.\vec{e_\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\varphi}.\vec{e_\varphi} = \frac{\partial V}{\partial r}.\vec{e_r}$$

On remarque que, en coordonnées sphériques, pour un système invariant selon φ et θ, ($\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$) le gradient devient : $\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r}.\vec{e_r}$

On peut donc écrire : $\boxed{\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r} = -\overrightarrow{grad}(V) \text{ avec } V = \frac{q}{4\pi.\varepsilon_0.r}}$

V est nommé potentiel, il s'exprime en volt

On dit que le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel *V*.

La relation $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$ montre que $\vec{E}$ s'exprime en V/m

3.2 Potentiel d'une répartition de charge

Soit une répartition de charge q_i ($1 \le i \le N$) placée au point A_i. (cf. figure 2) Le potentiel électrostatique crée au point *M* par la répartition de charge est la somme de tous les potentiels crées par les différentes charges : $V = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$ où $r_i = A_i.M$

Et on en déduit le champ électrique créé au point *M* par la relation $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$

Le calcul du potentiel qui est scalaire est bien plus aisé que le calcul direct du champ qui est vectoriel.

4. ENERGIE ET TRAVAIL DES FORCES ELECTROSTATIQUES

Soit une charge q placée au point *A* dans une zone où existe le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel *V* ($\vec{E}$ et *V* sont crées par d'autres charges). La charge q est soumise à des forces et donc peut se déplacer spontanément, c'est-à-dire que ce système possède une énergie potentielle notée E_{elec}. Si la charge q se déplace du point A au point A' très proche , elle subit le déplacement (contraint) $\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{AA'}$.

Le travail des forces électrostatiques est $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dA}$ avec $\vec{F} = q.\vec{E}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Soit $dW=-q.\overrightarrow{grad(V)}.\overrightarrow{dA}$ or $\overrightarrow{grad(V)}.\overrightarrow{dA}=V(A')-V(A)=dV$ ➔ $dW=-q.dV$. Le travail des forces électrostatiques ne dépend que de la différence de potentiel et non du chemin suivi.
Si le système est isolé, le déplacement est spontané, l'énergie totale du système est constante. Donc $dE_{elec}+dW=0$ ➔ $dE_{elec}=q.dV$

> L'énergie dE_{elec} à fournir pour amener une charge q du potentiel V au potentiel $V+dV$ est $dE_{elec}=q.dV$

Si la charge q est constante, l'énergie électrostatique du système est $E_{elec}=q.V$

5. INFLUENCE DES MATERIAUX SUR LE CHAMP ELECTRIQUE

5.1 Equilibre d'un matériau conducteur

Un conducteur est un matériau qui possède des charges électriques libres de se déplacer. Par définition, **à l'équilibre ces charges sont immobiles**. Si une charge libre q est placée dans un champ électrique $\vec{E}$ elle est soumise à la force $\vec{F}=q.\vec{E}$ et ainsi si elle est libre de se déplacer elle possède l'accélération $\vec{a}$ telle que $\vec{F}=m.\vec{a}$ (où m est la masse de la particule ayant la charge q). A l'équilibre les particules sont immobiles donc leur accélération est nulle, ainsi $\vec{F}=q.\vec{E}=m.\vec{a}=\vec{0}$ ➔ $\vec{E}=0$ **à l'intérieur du conducteur**. Or $\vec{E}=-\overrightarrow{grad(V)}$ donc V **est constant dans tout le volume du conducteur.**

Par contre à la surface du conducteur les charges sont soumises à la force $\vec{F}=q.\vec{E}$ et à la force $\vec{F_c}$ de cohésion de la matière (les particules ne peuvent pas sortir de la matière à cause de cette force) donc sur la surface $\vec{F}+\vec{F_c}=q.\vec{E}+\vec{F_c}=m.\vec{a}=\vec{0}$ ainsi **les charges libres de se déplacer se condensent à la surface du conducteur.**

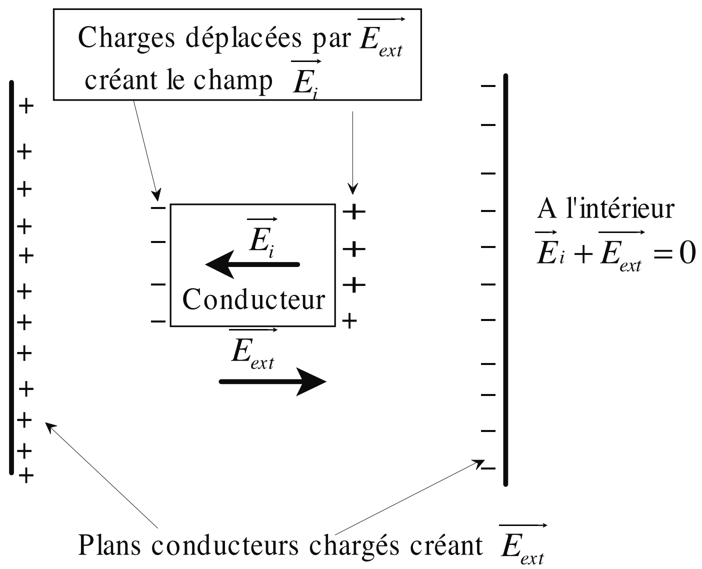

figure 5

Considérons, figure 5, deux plans « infinis » chargés créant dans l'espace entre ces deux plans le champ uniforme $\vec{E}_{ext}$. On introduit un cube conducteur entre les deux plans.

Le champ $\vec{E}_{ext}$ impose une force aux charges libres du conducteur, ces charges se déplacent jusqu'à la surface durant un régime transitoire, à l'équilibre les charges se sont condensées et créent un champ $\vec{E}_i$ tel qu'à l'intérieur du conducteur $\vec{E}_{ext} + \vec{E}_i = 0$. Et au voisinage du conducteur le champ électrique est modifié, le champ électrique n'est plus uniforme. Les charges négatives libres de se déplacer tendent à s'approcher le plus possible des charges positives extérieures au conducteur et de même les charges positives tendent à s'approcher le plus possible des charges négatives extérieures au conducteur. Sur la figure 5, on montre qualitativement la répartition des charges à l'équilibre.

Ce résultat est encore valable pour un conducteur creux (cf. figure 6). La surface intérieure est équipotentielle et forcément non chargée, les charges sont localisées à la surface extérieure du conducteur. Un conducteur creux forme une **cage de Faraday,** c'est-à-dire une zone de l'espace protégée des champs électriques extérieurs.

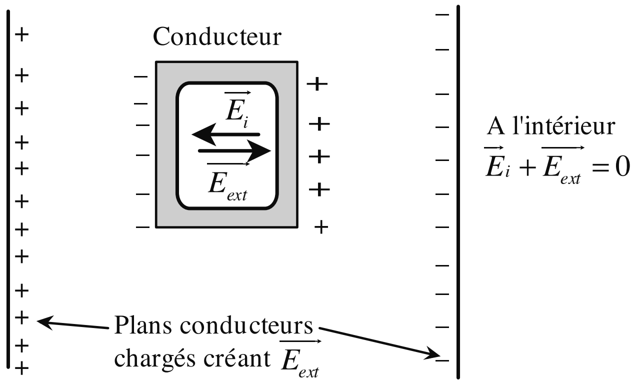

figure 6

5.2 Pouvoir des pointes, capacité d'une sphère conductrice

Soit une sphère conductrice de rayon R et portant la charge Q., cf. figure 7. Par raisons de symétrie cette charge est condensée à la surface de façon uniforme. La densité surfacique de charge est ainsi $\sigma = \frac{Q}{4.\pi.R^2}\ C/m^2$ (la surface d'une sphère de rayon R est $S = 4.\pi.R^2$).

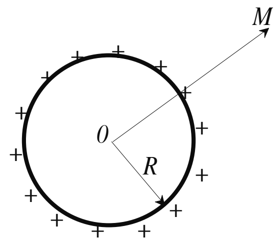

figure 7

Par raisons de symétrie le champ électrique en tout point de la sphère est radial et uniforme (le module E est le même en tout point). La charge intérieure à la sphère de rayon R est Q , ainsi d'après le théorème de Gauss

$$\iint_{sphère} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \iint_{sphère} E.dS = E \iint_{sphère} dS = E.4.\pi.R^2$$

Le champ électrique à la surface est $E = \dfrac{Q}{4\pi.\varepsilon_0.R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ comme si toute la charge était située au centre de la sphère.

Le potentiel à la surface de la sphère est créé par la charge Q placée au centre, soit $V = \dfrac{Q}{4\pi.\varepsilon_0.R}$. Le potentiel d'un conducteur à l'équilibre est constant donc ce potentiel est celui de la toute la sphère conductrice.

$E = \dfrac{Q}{4\pi.\varepsilon_0.R^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et $V = \dfrac{Q}{4\pi.\varepsilon_0.R}$ et $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi.R^2}$ conduisent à :

$E = \dfrac{V}{R}$ et $\sigma = E.\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \dfrac{V}{R}$.

Les charges se concentrent dans les zones où le rayon de courbure est faible, (les pointes). Sur les pointes le champ électrique est plus élevé que sur les zones « plates » comme indiqué sur la figure 8.

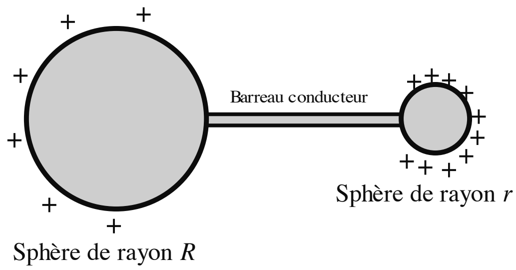

figure 8

Pour un corps susceptible de se charger on définit la capacité $C = \dfrac{Q}{V}$ **qui s'exprime en farad** *(F)*. Pour la sphère on a $C = \dfrac{Q}{V} = 4\pi.\varepsilon_0.R$

Ainsi on observe que l'unité de $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi.10^9} = \dfrac{C}{4\pi.R.}$ est le farad par mètre (F/m).

Une sphère de rayon $R = 1\ cm$ portée au potentiel $V = 1\ kV$ porte la charge électrique : $Q = 4\pi.\varepsilon_0.R.V = \dfrac{4\pi.10^{-2}.10^3}{36\pi.10^9} \approx 10^{-9}\ C = 1\ nC$.

5.3 La pression électrostatique

Un conducteur chargé porte les charges en surface avec la densité surfacique $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$. Au voisinage de l'élément dS, le champ électrique **est nul,** $E = 0$ **à l'intérieur** du conducteur et il vaut $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ **à l'extérieur du conducteur** (cf. §5.2). Le champ électrique **moyen** sur l'élément dS qui porte la charge $dq = \sigma.dS$ est ainsi $E_{moy} = \dfrac{0+E}{2}$.

La force qui s'exerce sur l'élément dS est donc $dF = dq.E_{moy} = \sigma.dS.\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Cette force est répulsive car les charges de même signe se repoussent. L'élément dS tend à être arraché du