

<b>1</b>	<b>Notions de base</b>	<b>1</b>
1	Notions sur les ensembles . . . . .	2
1.1	Appartenance . . . . .	2
1.2	Inclusion, égalité . . . . .	2
1.3	Opérations élémentaires dans $\mathcal{P}(E)$ . . . . .	3
1.4	Propriétés des opérations élémentaires . . . . .	3
1.5	Produit d'ensembles . . . . .	6
2	Applications . . . . .	7
2.1	Définition et exemples d'applications . . . . .	7
2.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité . . . . .	9
2.3	Image directe, image réciproque d'une partie . . . . .	14
2.4	Restriction, prolongement, application induite . . . . .	15
2.5	Fonction indicatrice d'une partie . . . . .	16
3	Éléments de logique . . . . .	18
3.1	Généralités . . . . .	18
3.2	Propriétés des éléments d'un ensemble $E$ . . . . .	19
3.3	Opérations élémentaires sur les assertions . . . . .	19
3.4	Comparaison des propriétés des éléments de $E$ . . . . .	20
3.5	Propriétés de l'ensemble $E$ . . . . .	22
4	Stratégies de démonstration . . . . .	23
4.1	Quelques cas particuliers rencontrés . . . . .	23
4.2	Stratégies pour démontrer une propriété universelle . . . . .	24
4.3	Stratégies pour démontrer une propriété existentielle . . . . .	24
4.4	Stratégies pour démontrer une implication . . . . .	25
5	How To . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Entiers naturels et Dénombrements</b>	<b>31</b>
1	Entiers naturels . . . . .	32
1.1	Principe de récurrence . . . . .	32
1.2	Opérations dans $\mathbb{N}$ . . . . .	36
2	Ensembles finis, ensembles dénombrables . . . . .	38
2.1	Notion de cardinal des ensembles finis . . . . .	38
2.2	Ensembles dénombrables . . . . .	43
3	Dénombrement . . . . .	44
3.1	Réunions d'ensembles . . . . .	44
3.2	Produits cartésiens d'ensembles finis . . . . .	47
3.3	Applications entre ensembles finis . . . . .	48
3.4	Parties d'un ensemble fini . . . . .	50
4	Analyse combinatoire . . . . .	51
4.1	Tirages successifs avec remise ou $p$ -listes . . . . .	51
4.2	Tirages successifs sans remise ou arrangements . . . . .	52
4.3	Tirages simultanés ou combinaisons . . . . .	53
4.4	Propriétés des coefficients binomiaux . . . . .	54
5	How To . . . . .	58

<b>3</b>	<b>Espaces probabilisés finis</b>	<b>59</b>
1	Le langage des probabilités . . . . .	60
1.1	Expérience aléatoire . . . . .	60
1.2	Événements aléatoires . . . . .	60
1.3	Liens avec les opérations ensemblistes . . . . .	61
1.4	Systèmes complets d'événements . . . . .	61
2	Probabilité sur un ensemble $\Omega$ fini . . . . .	62
2.1	Exemple fondamental : probabilité uniforme . . . . .	62
2.2	Notion de probabilité sur un ensemble fini . . . . .	63
2.3	Propriétés des probabilités finies . . . . .	64
2.4	Construction d'une probabilité sur un ensemble fini . . . . .	67
3	Probabilités conditionnelles . . . . .	69
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ . . . . .	69
3.3	Formule des probabilités composées . . . . .	71
3.4	Formule des probabilités totales . . . . .	72
3.5	Formule de Bayes . . . . .	73
4	Indépendance en probabilité . . . . .	74
4.1	Indépendance de deux événements . . . . .	74
4.2	Indépendance mutuelle de plusieurs événements . . . . .	76
5	How To . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Les nombres réels</b>	<b>79</b>
1	Opérations dans $\mathbb{R}$ . . . . .	80
1.1	Addition et multiplication . . . . .	80
1.2	Puissances entières d'un nombre réel non nul . . . . .	81
1.3	Identités remarquables : formule du binôme et identité géométrique . . . . .	81
2	Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	82
2.1	Compatibilité des opérations et de la relation d'ordre . . . . .	83
2.2	Majorants et parties majorées . . . . .	83
2.3	Borne supérieure . . . . .	84
2.4	$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure . . . . .	85
3	Conséquences de la relation d'ordre . . . . .	86
3.1	Valeur absolue d'un nombre réel . . . . .	86
3.2	Partie entière d'un réel . . . . .	88
3.3	Intervalles de $\mathbb{R}$ et convexité . . . . .	89
4	Droite numérique achevée . . . . .	91
4.1	Addition et multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	92
4.2	Relation d'ordre total dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	92
5	Approfondissements . . . . .	93
5.1	$\mathbb{R}$ a la propriété d'Archimède . . . . .	93
5.2	Approximation décimale d'un réel . . . . .	94
5.3	$\mathbb{R}$ est non dénombrable . . . . .	95
5.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un réel positif . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Fonctions numériques : généralités</b>	<b>99</b>
1	Propriétés des fonctions numériques . . . . .	100
1.1	Opérations algébriques sur les fonctions . . . . .	100
1.2	Symétries . . . . .	100
1.3	Fonctions réelles et ordre . . . . .	102
1.4	Fonctions monotones . . . . .	103
2	Fonctions usuelles . . . . .	106
2.1	Fonctions en escalier . . . . .	106
2.2	Fonctions polynômes et fonctions rationnelles . . . . .	107
2.3	Fonctions logarithmes et exponentielles . . . . .	107
2.4	Fonctions puissances d'exposants réels . . . . .	111

**6 L'ensemble des nombres complexes 115**

1 Notation algébrique des nombres complexes . . . . . 116

1.1 Le nombre complexe  $i$  . . . . . 116

1.2 Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe . . . . . 117

1.3 Les nombres réels forment un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  . . . . . 117

1.4 Opérations algébriques dans  $\mathbb{C}$  . . . . . 118

1.5 Conjugaison . . . . . 120

1.6 Interprétation géométrique . . . . . 121

2 Notation exponentielle des nombres complexes . . . . . 122

2.1 Module d'un nombre complexe . . . . . 122

2.2 Nombres complexes de module 1 . . . . . 123

2.3 Formules d'Euler et Moivre . . . . . 125

2.4 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul . . . . . 126

3 Racines  $n^{\text{ièmes}}$  d'un nombre complexe . . . . . 129

3.1 Racines  $n^{\text{ièmes}}$  de 1 . . . . . 129

3.2 Racines  $n^{\text{ièmes}}$  d'un nombre complexe quelconque . . . . . 131

3.3 Calcul des racines carrées en écriture algébrique . . . . . 133

4 Application aux équations polynomiales, *happy end!!* . . . . . 134

4.1 Equations polynomiales de degré 2 . . . . . 134

4.2 Equations polynomiales de degré 3 . . . . . 135

4.3 Equations polynomiales de degré 4 . . . . . 137

4.4 Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 . . . . . 139

5 How To . . . . . 140

**7 Polynômes à une indéterminée 143**

1 Polynômes à une indéterminée . . . . . 144

1.1 Définition de l'ensemble  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 144

1.2 Degré d'un polynôme . . . . . 145

1.3 Fonction polynomiale associée . . . . . 145

2 Opérations dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 146

2.1 Addition des polynômes . . . . . 146

2.2 Multiplication interne dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 147

2.3 Multiplication externe dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 149

2.4 Calculs dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 150

3 Dérivation dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 151

3.1 Polynôme dérivé . . . . . 151

3.2 Dérivées successives . . . . . 152

3.3 Formules de Taylor et Taylor Mac Laurin . . . . . 153

4 Divisibilité dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 155

4.1 Multiples et diviseurs . . . . . 155

4.2 Théorème Fondamental de la division euclidienne dans  $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$  . . . . . 156

4.3 Pratique de la division euclidienne . . . . . 159

5 Racines d'un polynôme . . . . . 159

5.1 Caractérisation des racines d'un polynôme . . . . . 159

5.2 Racines multiples . . . . . 161

5.3 Conséquences . . . . . 164

6 Factorisation des polynômes . . . . . 165

6.1 Factorisation dans  $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$  . . . . . 165

6.2 Factorisation dans  $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$  . . . . . 167

7 How To . . . . . 169

<b>8</b>	<b>Suites réelles</b>	<b>171</b>
1	Généralités sur les suites réelles . . . . .	172
1.1	Définition des suites de nombres réels . . . . .	172
1.2	Opérations sur les suites réelles . . . . .	174
1.3	Suites réelles et ordre . . . . .	175
2	Suites réelles convergentes . . . . .	178
2.1	Suites convergentes vers 0 . . . . .	178
2.2	Propriétés des suites convergentes vers 0 . . . . .	180
2.3	Suites convergentes . . . . .	182
2.4	Propriétés fondamentales des suites convergentes . . . . .	183
3	Théorèmes de convergence . . . . .	187
3.1	Opérations algébriques sur les suites convergentes . . . . .	187
3.2	Convergence par comparaison et encadrement . . . . .	188
3.3	Convergence des suites monotones . . . . .	189
3.4	Convergence des suites adjacentes . . . . .	190
4	Suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$ . . . . .	194
4.1	Définitions . . . . .	194
4.2	Opérations algébriques et limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	195
4.3	Comparaisons et limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	196
4.4	Limites monotones dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	197
5	How To . . . . .	198
<b>9</b>	<b>Etude de suites particulières</b>	<b>199</b>
1	Suites de référence . . . . .	200
1.1	Comportement asymptotique des suites de références . . . . .	200
1.2	Comparaison des suites de références . . . . .	201
2	Suites récurrentes . . . . .	204
2.1	Suites arithmétiques . . . . .	205
2.2	Suites géométriques . . . . .	206
2.3	Suites arithmético-géométriques . . . . .	208
2.4	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . . .	210
2.5	Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .	213
3	How To . . . . .	216
<b>10</b>	<b>Limites de fonctions</b>	<b>217</b>
1	Notions de limite . . . . .	218
1.1	Limite finie au point $a \in \overline{I}$ . . . . .	218
1.2	Extensions de la notion de limite . . . . .	219
1.3	Unicité de la limite . . . . .	221
1.4	Limite à gauche et à droite . . . . .	222
2	Propriétés fondamentales . . . . .	223
2.1	Caractérisation séquentielle de la limite . . . . .	223
2.2	Limites finies et fonctions localement bornées . . . . .	225
2.3	Limites et inégalités . . . . .	226
3	Théorèmes d'existence de limites . . . . .	227
3.1	Opérations sur les fonctions possédant une limite . . . . .	227
3.2	Changement de variable ou composition des limites . . . . .	228
3.3	Théorème de convergence par encadrement . . . . .	229
3.4	Cas des fonctions monotones . . . . .	230
4	Limites des fonctions usuelles . . . . .	232
4.1	Limites des fonctions trigonométriques . . . . .	232
4.2	Limites des fonctions exponentielles . . . . .	232
4.3	Limites de la fonction logarithme . . . . .	234
4.4	Limites des fonctions puissances . . . . .	235
4.5	Comparaison des fonctions usuelles . . . . .	235
5	Etude des branches infinies . . . . .	236

6	How To	239
<b>11</b>	<b>Comparaison locale des fonctions</b>	<b>241</b>
1	Fonction dominée par une autre fonction	242
2	Fonction négligeable devant une autre fonction	243
3	Fonctions équivalentes au voisinage d'un point	244
3.1	Règles de calculs sur les équivalents	246
3.2	Incompatibilité des équivalents avec l'addition	247
3.3	Quelques équivalents usuels	249
4	Application aux suites réelles	251
5	How To	254
<b>12</b>	<b>Fonctions continues sur un intervalle</b>	<b>255</b>
1	Continuité en un point	256
1.1	Continuité à droite et à gauche	256
1.2	Propriétés fondamentales des fonctions continues en un point	257
1.3	Opérations sur les fonctions continues en un point	258
1.4	Composition des fonctions continues en un point	258
2	Continuité globale	259
2.1	Opérations algébriques sur les fonctions continues	259
2.2	Composée des fonctions continues	259
2.3	Restriction d'une fonction continue	260
2.4	Prolongement par continuité	260
3	Les résultats fondamentaux	263
3.1	Image continue d'un intervalle	263
3.2	Image continue d'un segment	266
3.3	Théorème de la bijection	271
4	Application à l'étude des suites définies implicitement	274
5	How To	276
<b>13</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>277</b>
1	Systèmes d'équations linéaires	278
1.1	Définitions-exemples	278
1.2	Systèmes équivalents	279
1.3	Substitution	280
1.4	Opérations élémentaires sur les lignes	280
2	Résolutions de systèmes particuliers	280
2.1	Systèmes diagonaux	281
2.2	Systèmes triangulaires	281
2.3	Résolution des systèmes triangulaires par <b>remontée</b>	282
2.4	Solutions d'un système triangulaire	282
2.5	Systèmes échelonnés	284
2.6	Définitions	284
2.7	Résolution des systèmes échelonnés	285
3	La méthode du pivot de GAUSS	286
3.1	Théorème Fondamental	286
3.2	Pratique de la méthode de GAUSS	287
4	Structure de l'ensemble des solutions	289
4.1	Résultats basiques	289
4.2	Systèmes de Cramer	289
5	How To solve a system of linear equations	294

<b>14</b>	<b>Calcul Matriciel</b>	<b>295</b>
1	Définition et opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	296
1.1	Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	296
1.2	Egalité de deux matrices	297
1.3	Addition de deux matrices	297
1.4	Multiplication des matrices par un scalaire	297
1.5	Produit de matrices	298
1.6	Transposition	301
1.7	Conjugaison	302
2	Matrices carrées	302
2.1	Exemples importants	302
2.2	Opérations dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	303
2.3	Puissances d'une matrice carrée	304
2.4	Polynômes de matrices	307
3	Matrices inversibles	307
3.1	Définition de $GL_n(\mathbb{K})$	307
3.2	Propriétés des matrices inversibles	308
3.3	Lien fondamental avec les systèmes de CRAMER	309
4	Détermination pratique de l'inverse	312
4.1	Point de vue systèmes d'équations linéaires	312
4.2	Algorithme de GAUSS-JORDAN	313
4.3	Utilisation d'une relation polynomiale	316
5	How To	318

<b>15</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>319</b>
1	Généralités	320
1.1	Définition des séries numériques	320
1.2	Opérations algébriques sur les séries	321
1.3	Convergence des séries	322
1.4	Condition nécessaire de convergence	327
2	Séries à termes positifs	328
2.1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	328
2.2	Comparaison des séries à termes positifs	329
2.3	Utilisation d'équivalents	329
3	Séries absolument convergentes	330
3.1	Définition et caractérisation	330
3.2	Condition suffisante de convergence	331
4	Conséquences de la convergence absolue	332
4.1	Sommation par paquets	332
4.2	Modification de l'ordre des termes	335
4.3	Convergence des produits de convolution	337
5	Séries de référence	339
5.1	Séries géométriques & dérivées	339
5.2	Séries de RIEMANN	342
5.3	Série exponentielle	344
6	How To	346

<b>16</b>	<b>Espaces probabilisés : cas général</b>	<b>347</b>
1	Probabilité sur $\Omega$	349
1.1	Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$	349
1.2	Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$	353
1.3	Propriétés usuelles des probabilités	354
1.4	Propriétés de continuité monotones	356
2	Conditionnement	358
2.1	Probabilité conditionnelle	358
2.2	Formule des probabilités composées	359

2.3	Formule des probabilités totales . . . . .	360
2.4	Formule de Bayes . . . . .	361
3	Indépendance en probabilité . . . . .	361
3.1	Indépendance de deux sous-tribus . . . . .	361
3.2	Indépendance d'une famille d'événements . . . . .	362
4	How To . . . . .	364
<b>17</b>	<b>Variables aléatoires réelles</b>	<b>365</b>
1	Variables aléatoires réelles finies . . . . .	367
1.1	Définition-Exemples . . . . .	367
1.2	Fonction d'une variable aléatoire réelle finie . . . . .	367
2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie . . . . .	368
2.1	Définition . . . . .	368
2.2	Propriétés des lois de probabilités . . . . .	368
2.3	Loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle finie . . . . .	369
2.4	Fonction de répartition . . . . .	370
3	Moments d'une variable aléatoire réelle finie . . . . .	372
3.1	Espérance d'une variable aléatoire réelle finie . . . . .	372
3.2	Variance . . . . .	374
3.3	Moments d'ordre $r$ . . . . .	376
4	Variables aléatoires discrètes infinies . . . . .	376
4.1	Généralités sur les variables aléatoires réelles discrètes . . . . .	376
4.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète . . . . .	379
4.3	Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète . . . . .	381
4.4	Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète . . . . .	384
4.5	Moments d'ordre supérieur . . . . .	388
5	How To . . . . .	390
<b>18</b>	<b>Lois discrètes usuelles</b>	<b>391</b>
1	La loi uniforme . . . . .	393
2	La loi hypergéométrique . . . . .	394
3	La loi de Bernouilli . . . . .	397
4	La loi binomiale . . . . .	398
5	La loi géométrique . . . . .	399
6	Loi de Poisson . . . . .	402
7	How To . . . . .	403
<b>19</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>405</b>
1	Espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ . . . . .	408
1.1	Structure algébrique . . . . .	408
1.2	Calculs dans un espace vectoriel . . . . .	409
1.3	Exemples d'espaces vectoriels . . . . .	410
2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	412
2.1	Définition et caractérisation . . . . .	412
2.2	Exemples de sous-espaces vectoriels . . . . .	414
2.3	Intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	417
2.4	Sommes de sous-espaces vectoriels . . . . .	418
3	Familles de vecteurs . . . . .	421
3.1	Sous-espace vectoriel engendré par une partie . . . . .	421
3.2	Famille génératrice . . . . .	423
3.3	Famille libre . . . . .	425
3.4	Base d'un espace vectoriel . . . . .	430
3.5	Exemples de bases . . . . .	432
4	How To . . . . .	434

<b>20 Applications linéaires</b>	<b>437</b>
1 Généralités . . . . .	438
1.1 Définitions . . . . .	438
1.2 Isomorphismes . . . . .	439
1.3 Opérations sur les applications linéaires . . . . .	441
2 Noyau et image d'une application linéaire . . . . .	443
2.1 Image directe d'un s.e.v. par une application linéaire . . . . .	443
2.2 Image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire . . . . .	444
3 Image d'une famille de vecteurs . . . . .	446
3.1 Image d'une famille génératrice . . . . .	446
3.2 Image d'une famille libre . . . . .	447
3.3 Caractérisation des isomorphismes . . . . .	447
4 Exemples d'applications linéaires . . . . .	448
4.1 Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ . . . . .	448
4.2 Dérivation des polynômes . . . . .	450
4.3 Projecteurs et projections . . . . .	450
4.4 Involutions et symétries . . . . .	453
5 How To . . . . .	455
<b>21 Dimension finie</b>	<b>457</b>
1 Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	458
1.1 Définitions-exemples . . . . .	458
1.2 Existence de bases . . . . .	458
1.3 Dimension . . . . .	460
1.4 Exemple fondamental . . . . .	462
1.5 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	464
2 Sous-espaces vectoriels d'un e.v. de dimension finie . . . . .	465
2.1 Dimension des sous-espaces . . . . .	465
2.2 Sommes de sous-espaces . . . . .	467
2.3 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie . . . . .	468
3 Familles de vecteurs d'un e.v. de dimension finie . . . . .	472
3.1 Familles libres et génératrices dans un e.v. de dimension finie . . . . .	472
3.2 Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	474
4 Applications linéaires en dimensions finies . . . . .	475
4.1 Formule du rang . . . . .	475
4.2 Rang d'une application linéaire . . . . .	477
5 How To . . . . .	478
<b>22 Théorie du Rang</b>	<b>479</b>
1 Représentation matricielle des familles de vecteurs . . . . .	481
1.1 Exemple introductif . . . . .	481
1.2 Matrice représentative d'un vecteur, d'une famille de vecteurs . . . . .	481
1.3 Isomorphismes de $E_n$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . . . . .	482
2 Représentation matricielle des applications linéaires . . . . .	483
2.1 Exemple introductif . . . . .	484
2.2 Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases . . . . .	485
2.3 Calcul de l'image d'un vecteur avec la matrice représentative . . . . .	486
2.4 Isomorphismes de $L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . . . . .	488
2.5 Composition des applications linéaires et produit matriciel . . . . .	489
3 Rang d'une matrice . . . . .	491
3.1 Définition . . . . .	492
3.2 Propriétés du rang des matrices . . . . .	493
3.3 Calcul du rang d'une matrice par la méthode de GAUSS . . . . .	495
3.4 Mise en oeuvre . . . . .	496
4 Conséquences . . . . .	496
4.1 Etude des familles de vecteurs . . . . .	496

4.2	Etude d'une application linéaire . . . . .	498
4.3	Etude d'une matrice . . . . .	499
4.4	Etude des systèmes d'équations linéaires . . . . .	500
5	How To . . . . .	502
<b>23</b>	<b>Dérivation</b> . . . . .	<b>503</b>
1	Dérivabilité . . . . .	504
1.1	Fonction dérivable en un point . . . . .	504
1.2	Fonction dérivée . . . . .	508
1.3	Opérations algébriques sur les fonctions dérivables . . . . .	508
1.4	Fonctions dérivées des fonctions usuelles . . . . .	511
2	Théorèmes fondamentaux . . . . .	515
2.1	Extremums locaux d'une fonction dérivable . . . . .	515
2.2	Théorème de ROLLE . . . . .	515
2.3	Théorèmes des ACCROISSEMENTS FINIS . . . . .	516
2.4	Fonctions monotones dérivables . . . . .	518
2.5	Exemple d'utilisation des accroissements finis . . . . .	519
3	Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	521
3.1	Définition . . . . .	521
3.2	Opérations algébriques sur les fonctions $n$ fois dérivables . . . . .	522
4	Convexité . . . . .	525
4.1	Définitions . . . . .	525
4.2	Inégalité des cordes . . . . .	525
4.3	Les pentes sont croissantes . . . . .	526
4.4	Inégalité des tangentes . . . . .	528
4.5	Point d'inflexion . . . . .	529
4.6	Inégalités et convexité . . . . .	530
5	How To . . . . .	531
<b>24</b>	<b>Intégration sur un segment</b> . . . . .	<b>535</b>
1	Construction de l'intégrale . . . . .	537
1.1	Intégrale des fonctions en escalier . . . . .	537
1.2	Intégrale des fonctions continues sur un segment . . . . .	539
2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	541
2.1	Linéarité . . . . .	541
2.2	Relation de Chasles . . . . .	543
2.3	Estimations d'intégrales . . . . .	544
2.4	Valeur moyenne . . . . .	546
3	Lien fondamental entre intégrales et primitives . . . . .	546
3.1	Intégrale fonction de sa borne supérieure . . . . .	546
3.2	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle . . . . .	547
3.3	Théorème fondamental du calcul intégral . . . . .	548
3.4	Accroissements finis des fonctions de classe $C^1$ . . . . .	549
4	Calculs d'intégrales . . . . .	550
4.1	Intégration à vue . . . . .	550
4.2	Intégration par opérations algébriques . . . . .	551
4.3	Intégration par parties . . . . .	551
4.4	Changement de variable . . . . .	552
5	Applications . . . . .	554
5.1	Sommes de Riemann . . . . .	554
5.2	Equations différentielles du premier ordre . . . . .	555
5.3	Prolongement des fonctions de classe $C^n$ . . . . .	557
6	How To . . . . .	558

<b>25</b>	<b>Formules de Taylor et développements limités</b>	<b>561</b>
1	Formules de Taylor	562
1.1	Polynômes de Taylor d'une fonction de classe $C^n$	562
1.2	Formule de Taylor avec reste intégrale	563
1.3	Formule de Taylor-Lagrange	565
1.4	Formule de Taylor-Young	566
2	Développements limités	567
2.1	Généralités	567
2.2	Propriétés	568
2.3	Développements limités des fonctions usuelles	570
2.4	Opérations sur les développements limités	571
2.5	Applications des développements limités	574
3	How To	577
<b>26</b>	<b>Vecteurs aléatoires discrets</b>	<b>579</b>
1	Couples de variables aléatoires	580
1.1	Loi conjointe	580
1.2	Lois marginales	583
1.3	Lois conditionnelles	585
1.4	Indépendance de deux variables aléatoires	587
1.5	Loi d'une fonction d'un couple de variables aléatoires	588
2	Moments	591
2.1	Propriétés de l'espérance	591
2.2	Variance d'une somme et covariance	595
3	Vecteurs aléatoires	597
3.1	Loi conjointe de $X_1, \dots, X_n$ , lois marginales	598
3.2	Indépendance de $n$ variables aléatoires	598
3.3	Somme de $n$ variables aléatoires	598
4	Convergence et approximations	602
4.1	Loi faible des grands nombres	602
4.2	Convergence en loi	604
5	How To	607
<b>27</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>609</b>
1	Réduction des endomorphismes	611
1.1	Endomorphismes diagonalisables	611
1.2	Eléments propres d'un endomorphisme	611
1.3	Valeurs propres d'un endomorphisme	613
1.4	Sous-espaces propres	616
1.5	Caractérisations des endomorphismes diagonalisables	619
2	Réduction des matrices carrées & Applications	623
2.1	Changement de base	623
2.2	Matrices diagonalisables	627
2.3	Exemples de diagonalisations	629
2.4	Applications	632
3	How To	634
<b>28</b>	<b>Fonctions numériques de deux variables réelles</b>	<b>635</b>
1	Préliminaires topologiques	636
1.1	Structure affine de $\mathbb{R}^2$	636
1.2	Structure euclidienne	637
1.3	Structure topologique	639
2	Fonctions de deux variables	642
2.1	Graphes et courbes de niveaux	642
2.2	Exemples	643
2.3	Fonctions partielles	644

3	Continuité des fonctions de deux variables . . . . .	645
3.1	Définitions . . . . .	645
3.2	Opérations sur les fonctions continues . . . . .	646
3.3	Propriétés fondamentales des fonctions continues . . . . .	648
3.4	Etude de la continuité de quelques fonctions . . . . .	650
4	Calcul différentiel de deux variables . . . . .	650
4.1	Développement limité à l'ordre 1 . . . . .	650
4.2	Dérivées partielles . . . . .	651
4.3	Fonctions de classe $\mathcal{C}^1(D)$ . . . . .	652
4.4	Gradient des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(D)$ . . . . .	654
5	How To . . . . .	656
<b>29</b>	<b>Statistique descriptive</b>	<b>657</b>
1	Description statistique d'une population . . . . .	658
1.1	Population, individus, échantillons . . . . .	658
1.2	Caractères quantitatifs et qualitatifs . . . . .	658
1.3	Séries statistiques associées à un échantillon . . . . .	659
2	Représentations d'une série statistique . . . . .	660
2.1	Diagrammes en bâtons pour un caractère qualitatif . . . . .	660
2.2	Diagrammes en bâtons pour un caractère quantitatif discret . . . . .	661
2.3	Histogrammes pour les caractères quantitatifs continus . . . . .	661
3	Caractéristiques de position et de dispersion . . . . .	662
3.1	Caractéristiques de position . . . . .	662
3.2	Caractéristiques de dispersion . . . . .	664