

Table des matières

1. ESPACES VECTORIELS	1
I. Sommes directes	1
A. Somme	1
B. Définition de la somme directe et premières propriétés	2
C. Décomposition de E en somme directe	3
II. Applications linéaires	5
A. Théorème fondamental	5
B. Dualité	6
III. Calcul matriciel	10
A. Matrices élémentaires	10
B. Utilisation de blocs	10
C. Trace	11
Exercices	13
Travaux dirigés	27
Noyaux itérés	27
Autour des involutions	30
Génération de $SL_2(\mathbf{Z})$	31
Inverse généralisée	32
Commutateurs	34
Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$	36
Fonctions de deux variables	39
Splines cubiques	43
2. DÉTERMINANTS	45
I. Groupe symétrique	45
A. Définition et structure	45
B. Signature	46
II. Déterminant de n vecteurs	47
A. Formes n -linéaires alternées	47
B. Déterminant de n vecteurs	49
III. Déterminant d'un endomorphisme	50
IV. Déterminant d'une matrice carrée	51
A. Définition et propriétés	51
B. Développement suivant une ligne ou une colonne	53
C. Quelques calculs	54

V. Applications des déterminants	55
A. Calcul de l'inverse d'une matrice	55
B. Orientation d'un espace vectoriel réel	56
C. Caractérisation d'une famille libre	56
D. Résolution de systèmes linéaires	57
Exercices	59
Travaux dirigés	69
Formule de Sylvester et déterminant de Hankel	69
Quelques propriétés de la comatrice	73
3. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	75
I. Sous-espaces vectoriels stables	75
A. Définitions	75
B. Décomposition en somme directe	76
II. Polynômes d'endomorphisme	76
A. Généralités	76
B. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$	78
C. Polynômes annulateurs	78
III. Éléments propres	79
A. Cas d'un endomorphisme	79
B. Cas d'une matrice	82
C. Polynôme caractéristique	83
IV. Réduction en dimension finie	86
A. Diagonalisation	86
B. Trigonalisation	91
Exercices	93
Travaux dirigés	104
Convergence de (A^m)	104
Projecteurs spectraux	105
Problème de Dirichlet discret	106
Endomorphismes de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ conservant le rang	109
Produit tensoriel	113
Pseudo-réflexions et polynômes réciproques	115
4. SÉRIES RÉELLES ET COMPLEXES	119
I. Généralités	119
A. Définitions	119
B. Exemples de base	120
C. Critère de Cauchy	121
D. Absolue convergence	122
E. Opérations sur les séries	122

II. Séries à termes positifs	124
A. Généralités	124
B. Comparaison à une série à termes positifs	125
III. Séries alternées	128
A. Définition et théorème	128
B. Application	129
Exercices	130
Travaux dirigés	138
Cas douteux de la règle de d'Alembert	138
Critère de la loupe et séries de Bertrand	139
Application de la convergence au sens de Cesàro	140
Somme de relations de comparaison	142
5. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	145
I. Normes	145
A. Définitions	145
B. Exemples fondamentaux	146
C. Nature d'une suite	148
D. Applications lipschitziennes	149
E. Comparaison des normes	150
II. Cas de la dimension finie	152
A. Suites	152
B. Parties ouvertes, parties fermées	153
C. Résultats relatifs aux suites réelles	155
D. Limite, continuité	156
E. Compacité	160
F. Applications linéaires, bilinéaires	161
Exercices	163
Travaux dirigés	173
Un théorème de point fixe	173
Des normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$	174
Commutant d'une matrice	176
6. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	179
I. Modes de convergence	179
A. Convergence simple	179
B. Convergence uniforme	180
C. Convergence normale	182
II. Permutation de limites	183
III. Approximations uniformes sur un segment	185
A. Subdivisions	185
B. Fonctions continues par morceaux	186
C. Fonctions en escalier	186
D. Théorèmes d'approximation	187
Exercices	188

7. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL	201
I. Dérivabilité	201
A. Définitions	201
B. Opérations	202
C. Dérivées d'ordre supérieur	204
D. Difféomorphismes	206
II. Définition de l'intégrale sur un segment	206
A. Cas des fonctions en escalier	206
B. Cas des fonctions continues par morceaux	208
III. Calcul différentiel, calcul intégral : le lien	212
A. Primitives	212
B. Accroissements finis	213
C. Suites et séries de fonctions	215
D. Calcul intégral	217
E. Formules de Taylor	219
Exercices	222
Travaux dirigés	233
Lemme de Riemann-Lebesgue	233
Point fixe stable	235
Étude d'une fonction définie par une intégrale	238
Théorèmes de l'Hôpital	239
Approximation polynomiale	241
Formule d'Euler Mac-Laurin	243
Sommes de valeurs d'une fonction en des points équidistants	247
Étude d'une fonction somme d'une série de fonctions	248
Quelques propriétés de la fonction zêta	250
Produits infinis	252
8. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE	255
I. Intégrales impropres convergentes	255
A. Généralités	255
B. Intégrales impropres de fonctions positives	257
C. Intégrales absolument convergentes	259
II. Intégration sur un intervalle quelconque	261
A. Intégrabilité	261
B. Propriétés	262
III. Espace vectoriel normé des fonctions intégrables	264
A. Normes	264
B. Convergence dominée	266
C. Intégration terme à terme	267
IV. Intégrales dépendant d'un paramètre	268
A. Continuité	268
B. Dérivabilité	269
Exercices	272

Travaux dirigés	287
Transformation de Laplace	287
Application de la transformation de Laplace à un système différentiel	290
Unité approchée	291
Transformée de Fourier et classe de Schwartz	292
Formule de Stirling	295
Calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$	296
Fonction définie par une intégrale	298
Intégration des relations de comparaison	300
Une équation fonctionnelle	301
9. SÉRIES ENTIÈRES	305
I. Rayon de convergence	305
A. Définitions	305
B. Détermination du rayon	306
II. Propriétés de la somme	309
A. Continuité	309
B. Intégration	310
C. Dérivabilité	311
III. Fonctions développables en série entière	312
A. Définitions	312
B. Séries de Taylor	312
C. Développements classiques	313
Exercices	316
Travaux dirigés	326
Théorème de Bernstein	326
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	328
Suite pseudo-périodique	331
Étude d'une fonction somme d'une série de fonctions	333
DSE des fonctions de Bessel d'ordre entier	335
Formules de Newton	338
10. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS	339
I. Structure préhilbertienne réelle	339
A. Formes bilinéaires symétriques	339
B. Produit scalaire	340
C. Orthogonalité	343
D. Projection orthogonale	347
II. Espaces Euclidiens	349
A. Expressions analytiques	349
B. Isomorphisme canonique	350
C. Adjoint d'un endomorphisme	350
D. Endomorphismes autoadjoints	351
E. Groupe orthogonal	352
F. Théorème spectral	356
G. Application aux coniques	357

Exercices	358
Travaux dirigés	370
Caractérisations des espaces euclidiens	370
Matrices symétriques positives	372
Polynômes orthogonaux ; généralités	377
Polynômes de Legendre	380
Polynômes de Tchebychev de première espèce	383
Déterminant de Gram	384
Théorème de Courant-Fischer ; inégalités de Weyl	388
Résolution approchée d'équations ; pseudo-solution	391
11. ANALYSE HILBERTIENNE	399
I. Structure préhilbertienne complexe	399
A. Produit scalaire	399
B. Orthogonalité	401
C. Projection orthogonale	403
II. Séries de Fourier	404
A. Structure préhilbertienne et extension	404
B. Coefficients de Fourier	405
C. Extension de l'inégalité de Bessel	407
D. Autres périodes	408
III. Problèmes de convergence	408
A. Théorème d'approximation de Weierstrass	408
B. Convergence en moyenne quadratique	409
C. Convergence ponctuelle	410
Exercices	413
Travaux dirigés	426
Propriétés de \mathcal{F}	426
Développements Eulériens	428
Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli	431
Phénomène de Gibbs pour une fonction créneau	433
Formule sommatoire de Poisson et fonction théta de Jacobi	434
Théorème de Müntz	437
12. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	439
I. Équations linéaires vectorielles d'ordre 1	439
A. Généralités	439
B. Résolution théorique	441
C. Équations scalaires	443
II. Équations linéaires scalaires d'ordre 2	445
A. Vocabulaire	445
B. Transformation du problème	446
C. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire	446
D. Étude de l'équation homogène	446
E. Équation à coefficients constants	447
F. Méthode de variation des constantes	447

G. Méthodes particulières	448
III. Équations non linéaires	450
Exercices	451
Travaux dirigés	463
Entrelacement de Sturm	463
Lemme de Gronwall ; applications	465
Méthode d'approximation d'Euler	467
13. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES	471
I. Calcul différentiel	471
A. Généralités	471
B. Opérations sur l'ensemble des applications de classe C^1	474
C. Algèbre $C^1(U, \mathbf{K})$	477
D. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	480
II. Compléments de calcul intégral	481
A. Formes différentielles	481
B. Intégrale curviligne	483
C. Intégrales doubles	484
Exercices	487
Travaux dirigés	496
Équation aux dérivées partielles	496
Équation des cordes vibrantes	499
14. GÉOMÉTRIE	503
I. Arcs paramétrés	503
A. Généralités	503
B. Paramétrages	504
C. Étude métrique	504
II. Courbes planes	505
A. Étude locale d'une courbe paramétrée	505
B. Premier théorème des fonctions implicites	508
C. Propriétés métriques	509
III. Surfaces	509
A. Surface paramétrée	509
B. Surface définie par une équation cartésienne	510
C. Intersection de deux surfaces	511
D. Quadriques	511
Exercices	517
Travaux dirigés	528
Tore	528
Ruban de Moëbius	531
Courbe définie par une condition différentielle	533
Chaînette	535
Spirale logarithmique	536
INDEX	539