

Table des matières

1. ALGÈBRE GÉNÉRALE	1
I. Classes résiduelles	2
A. Congruence modulo n	2
B. Morphisme canonique	3
C. Groupes cycliques	3
II. Groupes	4
A. Générations	4
B. Produit de groupes	6
III. Anneaux et corps	6
A. Idéaux d'un anneau commutatif.	6
B. Idéaux de \mathbf{Z} ; anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$	8
C. Idéaux de $\mathbf{K}[X]$	9
Exercices	10
Travaux dirigés	19
Dévissage du groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	19
Polynômes cyclotomiques	22
Somme de carrés et loi de réciprocité quadratique	26
Corps des quaternions ; théorème des quatre carrés	28
2. ESPACES VECTORIELS	33
I. Familles de vecteurs	33
A. Espace $\mathbf{K}^{(I)}$	33
B. Combinaisons linéaires	33
C. Bases et applications linéaires	35
II. Sommes directes	35
A. Somme	35
B. Définition de la somme directe et premières propriétés	36
C. Décomposition de E en somme directe	38
III. Applications linéaires	39
A. Théorème fondamental	39
B. Dualité	41
C. Trace	46
IV. Calcul matriciel	47
A. Utilisation de matrices élémentaires	47
B. Matrices équivalentes	48

C. Décomposition de matrices par blocs	48
D. Opérations élémentaires	49
Exercices	52
Travaux dirigés	68
Espaces vectoriels de matrices non inversibles	68
Codes	69
Théorème de Burnside (MP*)	72
Groupes multiplicatifs de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$	75
3. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	79
I. Sous-espaces vectoriels stables	79
II. Polynômes d'endomorphisme	80
A. Généralités	80
B. Théorème de décomposition des noyaux	82
III. Éléments propres	83
A. Cas d'un endomorphisme	83
B. Cas d'une matrice	85
C. Polynôme caractéristique	86
IV. Réduction en dimension finie	91
A. Diagonalisation	91
B. Trigonalisation	96
Exercices	98
Travaux dirigés	114
Matrices cycliques	114
Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ de codimension 1	118
Matrice de Vandermonde	121
Décomposition de Dunford ; applications	123
Suites récurrentes linéaires	127
4. ESPACES VECTORIELS NORMÉS	129
I. Normes et distances	129
A. Définitions	129
B. Exemples fondamentaux	132
C. Applications lipschitziennes	134
II. Suites	135
A. Nature d'une suite	135
B. Comparaison des normes	137
C. Suites extraites. Valeurs d'adhérence	138
D. Relations de comparaison	139
E. Complétude dans un espace vectoriel normé	140

III. Topologie dans un espace vectoriel normé	142
A. Voisinages, ouverts, fermés	142
B. Adhérence, intérieur, frontière	146
IV. Limites, continuité	147
A. Limites	147
B. Comparaisons	150
C. Continuité	150
D. Continuité uniforme	153
E. Homéomorphismes	153
F. Limite de fonctions à valeurs dans un espace de Banach	154
V. Applications linéaires, bilinéaires continues	155
A. Applications linéaires continues	155
B. Applications bilinéaires continues	157
VI. Compacité	158
VII. Espace vectoriel normé de dimension finie	161
VIII. Connexité par arcs	163
Exercices	165
Travaux dirigés	179
Des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$	179
Valeurs d'adhérence d'une suite ; applications	180
Morphismes continus entre les groupes $GL_n(\mathbf{C})$ et \mathbf{C}^*	183
5. SÉRIES	185
I. Généralités	185
A. Définitions	185
B. Exemples de base	186
C. Critère de Cauchy	187
D. Structure d'espace vectoriel	187
II. Séries à termes réels positifs	188
A. Généralités	188
B. Comparaison des séries à termes positifs	189
C. Développement décimal d'un réel	191
III. Séries alternées	192
IV. Convergence absolue	193
A. Définition et théorème général	193
B. Série géométrique dans une algèbre de Banach	194
C. L'exponentielle	195
D. Sommation de relations de comparaison	195
E. Produit de Cauchy	197
Exercices	199

Travaux dirigés	
Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann	212
Règle de Raabe-Duhamel	213
Transformation d'Abel ; premières applications	215
Théorème du point fixe et applications	217
Groupement par paquets	219
Espaces ℓ^p	221
6. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	225
I. Divers types de convergence de suites de fonctions	225
II. Continuité et limites uniformes	229
III. Approximations de fonctions	231
IV. Séries de fonctions	236
A. Divers modes de convergence	236
B. Propriétés de la somme	238
C. Séries doubles	239
Exercices	241
Travaux dirigés	252
Weierstrass et Bernstein	252
Théorèmes de Dini	253
Un produit infini	256
Une convergence vers la fonction exponentielle	259
7. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL	263
I. Dérivation	263
A. Définitions	263
B. Opérations	265
C. Fonctions de classe C^k	268
II. Intégrale sur un segment	271
III. Dérivation et intégration	273
A. Primitives de fonctions continues	273
B. Accroissements finis	275
C. Formules de Taylor	277
D. Exemple des intégrales de Wallis	277
IV. Suites et séries de fonctions	278
A. Convergence en moyenne	278
B. Dérivation	279
Exercices	281
Travaux dirigés	296

Une suite de fonctions périodiques	296
Intégration approchée	299
Majoration d'une fonction dérivée	302
Une racine carrée de fonction	304
Théorème de Borel	307
Fonctions à variation bornée	309
8. INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE	315
I. Cas des fonctions positives	315
A. Intégrabilité	315
B. Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive	320
II. Cas des fonctions à valeurs complexes	322
A. Intégrabilité	322
B. Intégrale	323
C. Extension de l'intégrale	326
D. Changement de variable	327
E. Application à l'étude de séries	327
F. Intégration des relations de comparaison	328
III. Espace vectoriel normé des fonctions intégrables	329
A. Normes	329
B. Convergence dominée	330
C. Intégration terme à terme des séries de fonctions	331
IV. Intégrales dépendant d'un paramètre	332
A. Continuité	332
B. Dérivabilité	333
C. Limite	334
D. Complément sur la fonction Γ	335
V. Intégrales doubles	336
A. Intégration sur un rectangle	336
B. Cas des fonctions positives	336
C. Cas des fonctions à valeurs complexes	338
Exercices	341
Travaux dirigés	363
Fonction définie par une intégrale	363
Convolution et régularisation	365
Transformation de Fourier	368
Transformation de Laplace	372
Méthode de Laplace ; application à la formule de Stirling	376
Calcul d'une intégrale	378
Formule des compléments	383
Développements asymptotiques de fonctions définies par une intégrale	385

9. SÉRIES ENTIÈRES	391
I. Rayon de convergence	391
A. Définitions	391
B. Détermination du rayon	392
II. Propriétés de la somme	395
A. Continuité	395
B. Intégration	395
C. Dérivabilité	396
III. Fonctions développables en série entière	397
A. Définitions	397
B. Séries de Taylor	398
C. Développements classiques	398
Exercices	401
Travaux dirigés	419
Théorème de Bernstein	419
Comportement aux bornes de l'intervalle de convergence	421
Inégalités de Cauchy ; applications	424
Une équation fonctionnelle	428
Un théorème de Hardy-Littlewood	433
10. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS	439
I. Formes quadratiques	439
A. Formes bilinéaires symétriques	439
B. Formes quadratiques	440
C. Formes bilinéaires symétriques de signe constant	440
D. Forme quadratique en dimension finie	441
II. Espaces préhilbertiens réels	443
A. Produit scalaire	443
B. Orthogonalité	446
C. Projection orthogonale	449
III. Espaces Euclidiens	451
A. Expressions analytiques	451
B. Isomorphisme canonique	452
C. Adjoint d'un endomorphisme	453
D. Automorphismes orthogonaux	455
E. Endomorphismes autoadjoints	459
Exercices	464
Travaux dirigés	475
Matrice et déterminant de Gram	475
Théorème de Courant-Fischer et applications	478

Méthode du gradient conjugué	480
Approximation d'une matrice de rang fixé	481
Conditionnement d'une matrice de Hilbert	486
Norme d'un endomorphisme autoadjoint	492
Formes positives et produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$	497
11. ANALYSE HILBERTIENNE	501
I. Structure préhilbertienne complexe	501
A. Produit scalaire	501
B. Orthogonalité	504
C. Projection orthogonale	507
II. Séries de Fourier	508
A. Structure préhilbertienne et extension	508
B. Coefficients de Fourier	509
C. Extension de l'inégalité de Bessel	510
D. Autres périodes	511
III. Problèmes de convergence	512
A. Convergence en moyenne quadratique	512
B. Convergence ponctuelle	514
Exercices	517
Travaux dirigés	533
Inégalité isopérimétrique	533
Polynômes de Bernoulli	535
Méthode de Jackson	539
Théorème de Bochner	544
Formule sommatoire	552
12. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	559
I. Équations différentielles linéaires	559
A. Généralités	559
B. Équations scalaires d'ordre 1	559
C. Équations linéaires du premier ordre	562
D. Équations scalaires d'ordre 2	568
II. Équations différentielles non linéaires	571
A. Systèmes différentiels autonomes dans une partie ouverte de \mathbf{R}^2	571
B. Équations non autonomes	574
C. Équation autonome sur un intervalle de \mathbf{R}	575
Exercices	577
Travaux dirigés	593
Théorème de Cauchy-Lipschitz : une preuve	593
Solutions pseudo-périodiques d'une équation différentielle	596

Fonctions oscillantes	601
Lemme de Gronwall ; applications	606
Position d'équilibre d'une équation autonome	610
Équation différentielle de Bessel	613
Une équation de Riccati	617
13. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES	621
I. Calcul différentiel	621
A. Généralités	621
B. Opérations sur l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1	624
C. Algèbre $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{K})$	627
D. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$	629
II. Complément de calcul intégral	632
A. Champs de vecteurs, de scalaires	632
B. Intégrale curviligne	634
C. Intégrales doubles	635
Exercices	638
Travaux dirigés	649
Endomorphismes conservant un opérateur différentiel	649
Équation aux dérivées partielles	653
14. GÉOMÉTRIE	657
I. Arcs paramétrés	657
A. Généralités	657
B. Paramétrages	658
C. Étude métrique	658
II. Courbes planes	659
A. Étude locale d'une courbe paramétrée	659
B. Premier théorème des fonctions implicites	662
C. Propriétés métriques	663
D. Étude d'un arc en polaires	664
III. Surfaces	665
A. Surface paramétrée	665
B. Surface définie par une équation cartésienne	665
C. Intersection de deux surfaces	666
D. Surfaces usuelles	667
E. Quadriques	670
Exercices	675
Travaux dirigés	690
Tore et cercles de Villarceau	690
Ruban de Moëbius	693

Courbe définie par une condition différentielle	695
Chaînette	697
Spirale logarithmique	699
INDEX	701