PT/PT*

Colles de mathématiques

Philippe Agnès
Rémi Coutens

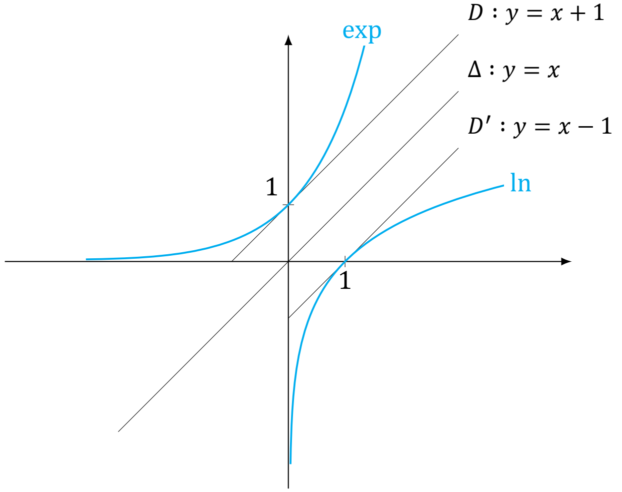
NOUVEAUX PROGRAMMES !

310 EXERCICES CORRIGÉS

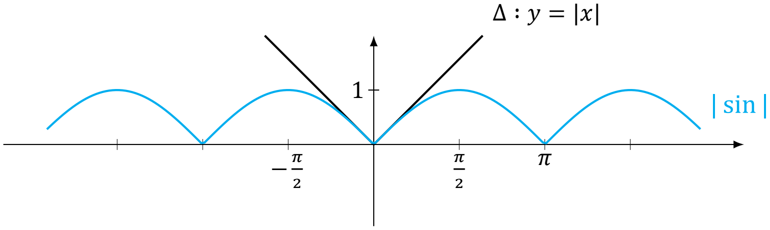
- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

Fonctions d'une variable 1



Deux inégalités à connaître : $e^x \geqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$ (ou encore $\ln(1 + t) \leqslant t$).



Autre inégalité utile $\left|\sin(x)\right| \leqslant |x|$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Étude de fonction*

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose :

$$\psi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) Montrer que ψ est constante sur $]0, +\infty[$ et préciser $\psi(x)$ pour $x > 0$.

2) Que devient ce résultat pour $x < 0$?

D'après Banque PT

Exercice 2 *Calcul trigonométrique*

Soit t un réel appartenant à $[0, \pi/2]$.

1) Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $\cos(t/2)$.

2) Comparer $\frac{1}{1+\tan^2(t/2)}$ et $\cos^2(t/2)$.

3) On pose $u = \tan(t/2)$. Exprimer $\cos(t)$ en fonction de u.

4) Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan(t/2)$.

D'après Banque PT

Exercice 3 *Étude d'une fonction*

Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

1) Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (notée encore f).

2) Étudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente en son point d'abscisse 0 et préciser une équation cartésienne de cette tangente.

4) Tracer l'allure de cette courbe.

D'après Oral 2

Exercice 4 *Utilisation de développements limités*

Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $M(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$.

1) Justifier que M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $M'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de M.

3) En déduire les vecteurs dérivés $M'(0)$, $M''(0)$ et $M^{(3)}(0)$.

Exercice 5 *Dérivées successives*

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

3) Déterminer deux réels α et β (que l'on exprimera en fonction de λ_1 et λ_2) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}, \qquad \frac{1}{x^2 - x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}.$$

4) Soit λ un réel. Préciser la dérivée n-ième de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x-\lambda}$.

5) En déduire la dérivée n-ième de la fonction g.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6 *Dérivées successives*

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
   On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

3) Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée n-ième du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$.

4) Dans cette question, on suppose $n \geqslant 2$.
   En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n - 1)f^{(n-2)}(x) = 0.$$

5) On pose, pour tout entier naturel p, $u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

   a) Calculer directement u_0 et u_1.

   b) Pour tout $p \geqslant 2$, montrer que $u_p = u_{p-1} + u_{p-2}$.

   c) En utilisant la formule de Taylor-Young et la question précédente, exprimer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

   d) Pour tout entier naturel p, exprimer u_p en fonction de p, de λ_1 et de λ_2.

D'après Banque PT

Exercice 7 *Classique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra montrer par récurrence que pour tout $x \neq 0$, $f^{(n)}(x)$ existe et est de la forme $P_n(1/x)\mathrm{e}^{-1/x^2}$, où P_n est un polynôme.

D'après Oral 1

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{k\pi}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right).$$

1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \alpha]$, on ait $\left|\sin(x) - x\right| \leqslant x^3$.
2) Justifier l'existence et préciser la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3) Montrer que la suite de terme général $|u_n - v_n|$ converge.
4) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

D'après Oral 2

Exercice 9 *Suites d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln(x)\right)^n \mathrm{d}x$.

1) Calculer u_1.
2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente.
3) Montrer que :

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

4) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres entiers telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a_n + b_n \mathrm{e}.$$

D'après Oral 2

Exercice 10 *Suite récurrente et étude de séries*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Trouver sa limite.
2) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$.
3) Montrer que les séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ sont de même nature.
4) En déduire la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$.

D'après Oral 2

Exercice 11 *Suite implicite*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n - \cos(x)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n admet un unique zéro sur $[0, 1]$ noté a_n.
2) Étudier les variations de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Étudier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
4) Déterminer un équivalent de $1 - a_n$ lorsque n tend vers l'infini.

D'après Oral 2

Exercice 12 ★★ *Suite récurrente*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1) Si $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$, a-t-on toujours $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{y_n}$?
   Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, alors :
$$\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{y_n} \iff \lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$$
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs positives.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   On pose $v_n = 2^{-n} \ln(u_n)$.
4) Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant} (v_{n+1} - v_n)$. En déduire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5) Donner un équivalent de u_n en fonction de la limite ℓ de v_n.

D'après Oral 1

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

Soit P un polynôme non nul. L'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ peut-elle admettre exactement $\deg(P)$ solutions ? Un nombre infini de solutions ?

D'après Oral 2

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Par addition et composition, la fonction ψ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

CORRECTIONS

Pour $x \in]0,+\infty[$, $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

La dérivée est nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc ψ est constante sur $]0,+\infty[$.

Remarque

Il est important que $]0,+\infty[$ soit un intervalle pour ce point. D'ailleurs, la dérivée de ψ est nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et la fin de l'exercice montre que ψ n'est pas constante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Or, $\psi(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2) La fonction arctan étant impaire, ψ l'est aussi, donc on obtient :

$$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2

1) On a, d'après les formules de duplication :

$$\cos(t) = \cos\big(2(t/2)\big) = 2\cos^2(t/2) - 1.$$

2) Par définition, $\tan = \sin/\cos$ donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\tan^2(t/2)} &= \frac{1}{1+\frac{\sin^2(t/2)}{\cos^2(t/2)}}\\ &= \frac{\cos^2(t/2)}{\cos^2(t/2)+\sin^2(t/2)} \quad \cos^2+\sin^2=1\\ &= \cos^2(t/2).\end{aligned}$$

3) Avec $u = \tan(t/2)$, on a en combinant les 2 résultats précédents :

$$\cos(t) = 2\frac{1}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

4) Remarquons que pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $2+\cos(t) > 0$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{2+\cos(t)}$ est continue sur le segment $[0,\pi/2]$. En particulier, l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ existe.

En utilisant le changement $u = \tan(t/2)$, on a $u \in [0,1]$ (car $\tan(0) = 0$ et $\tan(\pi/4) = 1$).

Avec le résultat du 2), $2+\cos(t) = 2 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{3+u^2}{1+u^2}$.

Comme $t/2 \in]-\pi/2,\pi/2[$, $u = \tan(t/2)$ entraîne $t/2 = \arctan(u)$. D'où $\mathrm{d}t = 2\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Après simplification, on obtient $I = \int_0^1 \frac{2}{3+u^2}\,\mathrm{d}u$.

Remarque
En pratique, on peut éviter le recours à arctan :
De $u = \tan(t/2)$, on a $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2(t/2)\right)\mathrm{d}t$. Comme $1 + \tan^2(t/2) = 1 + u^2$, on en déduit $\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

On pose ensuite $u = \sqrt{3}x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{3+3x^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(x)\right]_0^{1/\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(1/\sqrt{3}). && \arctan(0) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, $\pi/6 \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(\pi/6) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$.

Finalement, $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 3

1) Comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
On sait que $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$, d'où l'on déduit $e^{-t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + o(t)$.
Par conséquent, $1 - e^{-t} \underset{t\to 0}{=} t + o(t)$. Donc $1 - e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t$, puis $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$.
Ce résultat signifie que $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.
En posant $f(0) = 1$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2) Comme quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a :

$$f'(t) = \frac{e^{-t}t - (1 - e^{-t})}{t^2} = \frac{(t+1)e^{-t} - 1}{t^2}.$$

- **Première méthode (en utilisant $e^t \geqslant 1 + t$)**
  Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :
  $$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\iff (t+1)e^{-t} - 1 > 0 \\ &\iff (t+1)e^{-t} > 1 && \text{on multiplie par } e^t > 0 \\ &\iff (t+1) > e^t. \end{aligned}$$
  Or, $e^t \geqslant 1 + t$, donc $f'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \neq 0$.
- **Deuxième méthode (par étude de fonction)**
  Le signe de $f'(t)$ est celui de $\varphi(t) = (t+1)e^{-t} - 1$.

Comme $\varphi'(t) = \mathrm{e}^{-t} - (t+1)\mathrm{e}^{-t} + 0 = -t\mathrm{e}^{-t}$, on a le tableau de variations suivant pour φ :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et de dérivée négative sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.

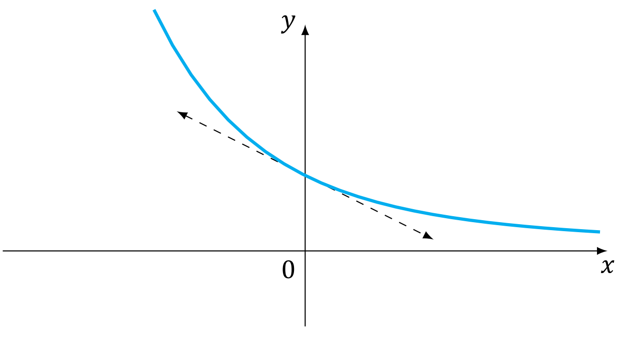
3) Il s'agit de montrer que f est dérivable en 0. Le plus rapide est de reprendre le calcul de la question 1) en utilisant un terme de plus dans le développement limité de l'exponentielle. En utilisant $\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + t^2/2 + o\left(t^2\right)$, on a :

$$f(t) = \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} = \frac{t - t^2/2 + o\,(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 - t/2 + o\,(t)\,.$$

L'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en 0 prouve la dérivabilité de f en 0 et on a $f'(0) = -1/2$.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -\frac{1}{2}x + 1$.

4) Ci-dessous l'allure de la courbe représensative de f.



Exercice 4

1) Les deux fonctions $\cos^3$ et $\sin^3$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit), la fonction M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On obtient en dérivant chacune des composantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad M'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin(t)\cos^2(t) \\ 3\cos(t)\sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

2) On connaît le développement limité de cos à l'ordre 3 en 0. En outre, on sait que l'on obtient un développement limité d'un produit à l'ordre 3 en 0 en ne conservant que les termes d'ordre inférieurs à 3.