MP/MP*
MPI/MPI*

Colles de mathématiques

Rémi Coutens

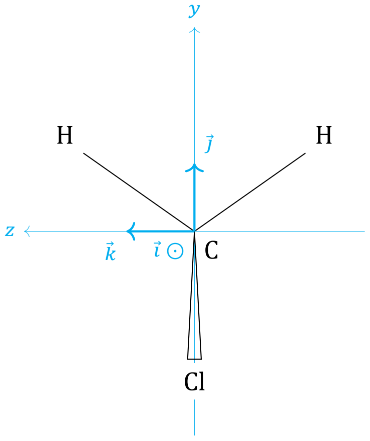
NOUVEAUX PROGRAMMES

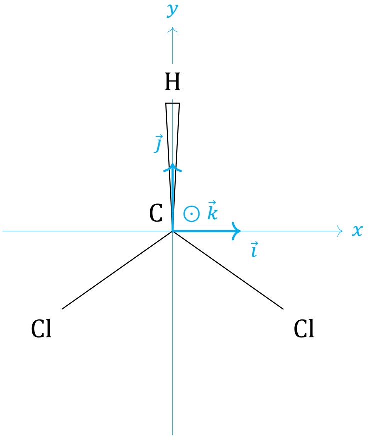
500 EXERCICES CORRIGÉS

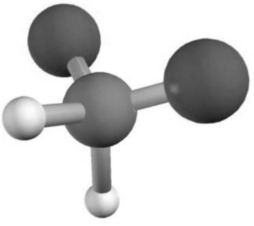
- Exercices de calcul
- Exercices de raisonnement
- Exercices avec questions ouvertes

ellipses

1 Groupes







	Id	s_y	s_{H}	s_{Cl}
Id	Id	s_y	s_{H}	s_{Cl}
s_y	s_y	Id	s_{Cl}	s_{H}
s_{H}	s_{H}	s_{Cl}	Id	s_y
s_{Cl}	s_{Cl}	s_{H}	s_y	Id

Une molécule de dichlorométhane CH_2Cl_2 a quatre isométries qui la laissent invariante : l'identité Id, la symétrie s_y par rapport à la droite Oy, la réflexion s_{H} par rapport à xOy, qui échange les atomes d'hydrogène, et la réflexion s_{Cl} par rapport à yOz, qui échange les atomes de chlore.
Le groupe formé par ces quatre isométries (pour la loi $\circ$) est appelé le *groupe de symétrie* de la molécule. Il s'agit du groupe de Klein, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Image par un morphisme de l'itéré d'un élément*

Soient G et G' deux groupes notés additivement.
Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in G$, on désigne par nx l'itéré de x d'ordre n dans le groupe G.
Soit f un morphisme de G dans G'.

1) Montrer que pour $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$.
2) Montrer que l'égalité précédente est encore vraie quand $n \in \mathbb{Z}$.
3) Que deviennent ces égalités en notations multiplicatives ?

Exercice 2 *Classique*

Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ vers $(\mathbb{R}, +)$.
Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

Exercice 3

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_9$ définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1) Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2) Déterminer la signature et l'ordre de σ.

Exercice 4

Déterminer le sous-groupe (additif) de $\mathbb{Z}$ engendré par $\{12, 18, -27\}$.

Exercice 5

Montrer que le sous-groupe (multiplicatif) de $\mathbb{C}^*$, engendré par i et $\mathrm{j} = \exp(2\mathrm{i}\pi/3)$, est $\mathbb{U}_{12}$ (le groupe des racines 12-ièmes de l'unité).

Exercice 6

On rappelle que pour tout a réel, $b = \sqrt[3]{a}$ désigne l'unique réel b tel que $a = b^3$.
On munit $\mathbb{R}$ de la loi $\star$ définie par :

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

1) Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe abélien.
2) Montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 7 *Automorphismes intérieurs*

Soit $(G,*)$ un groupe. Pour $a \in G$, on note a^{-1} son symétrique pour la loi $*$ et τ_a l'application de G vers G définie par $x \mapsto a * x * a^{-1}$.

1) Montrer que τ_a est un automorphisme du groupe $(G,*)$ (c'est-à-dire un isomorphisme du groupe dans lui-même).
2) Vérifier que :
$$\forall a,b \in G, \quad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a*b}.$$
3) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a, a \in G\}$ est un sous-groupe du groupe des permutations de G.

D'après Mines-Télécom

Exercice 8 *Centre d'un groupe*

1) Soit $(G,*)$ un groupe. On note :
$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ x * y = y * x\}.$$
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec x, y et $z \in \mathbb{R}$ est un groupe pour le produit matriciel. Trouver le centre de ce groupe.

Exercice 9

On considère l'intervalle $I = [0,1[$. Pour x et y dans I, on pose :
$$x \star y = x + y - \lfloor x + y \rfloor.$$

1) Montrer que $(I,\star)$ est un groupe abélien.
2) Résoudre l'équation $x \star x = 0$ d'inconnue $x \in I$.
En déduire qu'il existe un unique $d \in I$ qui soit d'ordre 2 dans $(I,\star)$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, préciser, s'il en existe, les éléments d'ordre n de I.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10 *Classique*

Montrer que la réunion de deux sous-groupes est un sous-groupe si, et seulement si, l'un des deux sous-groupes est inclus dans l'autre.

Exercice 11

Soient $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e et $f : x \mapsto x^{-1}$ l'application de G dans lui-même qui à tout élément de G associe son inverse pour la loi $*$.
Montrer que f est un automorphisme du groupe $(G,*)$ si, et seulement si, le groupe $(G,*)$ est commutatif.

Exercice 12

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont le déterminant vaut 1 ou -1.

1) Soit M une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients entiers et inversible.
Montrer que si M^{-1} est à coefficients entiers, alors $\det(M) = \pm 1$.
2) Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication.
3) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer l'ordre de A, de B et de AB. Que peut-on en conclure ?

Exercice 13

Soient H et K deux groupes notés multiplicativement.

1) Soient h un élément de H et k un élément de K. On suppose ces éléments d'ordres finis. On note p l'ordre de h, q celui de k et $r = \mathrm{ppcm}(p,q)$.
Montrer que (h,k) est un élément d'ordre r dans le groupe $H \times K$.
2) On suppose que H et K sont des groupes cycliques.
Montrer que le groupe produit $H \times K$ est cyclique si, et seulement si, les ordres de H et K sont premiers entre eux.

Exercice 14

Soit G un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1) Montrer que $G \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
2) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = \mathbb{U}_p$ (ensemble des racines p-ièmes de 1).

Exercice 15 ★★ *Groupes des éléments d'ordre fini de $\mathbb{C}^*$*

On note $\mathbb{U}_\infty = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}$.

1) Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ est infini.
2) Montrer $\mathbb{U}_\infty$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*, \times\right)$.
3) Montrer que $\mathbb{U}_\infty$ n'est pas engendré par une partie finie.

Exercice 16 ★★

Soient G un groupe fini noté multiplicativement, H et K deux sous-groupes de G.
On note $f : H \times K \to G, (h,k) \mapsto hk$ et :

$$HK = \{hk; h \in H,\ k \in K\}.$$

1) Quelle est l'image de f ? Déterminer le nombre d'antécédents par f que possède un élément de cette image.

2) En déduire que :

$$\mathrm{Card}(HK)\mathrm{Card}(H \cap K) = \mathrm{Card}(H)\mathrm{Card}(K).$$

Exercice 17 *Sous-groupe d'un groupe cyclique*

On désire établir que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est lui-même cyclique : on introduit un groupe cyclique $(G, *)$, a un générateur de G et H un sous-groupe de $(G, *)$.

1) Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel non nul n tel que $a^n \in H$.

2) Établir qu'alors H est le groupe engendré par a^n.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(G, *)$ un groupe de cardinal $2n$.
Soient A et B deux sous-groupes de G de cardinal n tels que $A \cap B = \{e\}$.

1) Montrer qu'il existe $c \in G$ tel que $A \cup B \cup \{c\} = G$.

2) Montrer que :

$$\forall a \in A \setminus \{e\}, \forall b \in B \setminus \{e\}, \quad a * b = c.$$

En déduire $n = 2$.

Exercice 19 ★

1) Soient f un homomorphisme de groupes de G dans G' et x un élément de G d'ordre fini p.
Que peut-on dire de l'ordre de $f(x)$ dans G' ?

2) Trouver tous les morphismes de groupes additifs de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

3) Trouver tous les morphismes de groupes additifs de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 20 ★

Montrer qu'il existe un multiple de 23 dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.

D'après TPE Mines-Ponts

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 21

Que dire d'un groupe dont le nombre d'éléments est un nombre premier ?

Exercice 22 *Ordre de xy et de yx*

Soient x et y éléments d'un groupe G (quelconque) noté multiplicativement.
Existe-t-il un lien entre l'ordre de xy et celui de yx ?

Exercice 23 ⋆⋆

Soit G un groupe noté multiplicativement. On suppose que tous les éléments du groupe (autres que l'élément neutre e) sont d'ordre 2.

1) Montrer que G est un groupe abélien.
   Indication : Pour x et $y \in G$, on pourra considérer $(xy)(xy)$.
2) Soit H un sous-groupe de G et $x \in G \setminus H$. On note K le sous-groupe engendré par $H \cup \{x\}$.
   a) Montrer que $K = H \cup xH$.
   b) Montrer que si H est fini, alors $\mathrm{card}(K) = 2\,\mathrm{card}(H)$.
3) En supposant de plus que G est un groupe fini, que peut-on dire de $|G|$?

Exercice 24 *Plus petit sous-groupe non commutatif*

Quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un groupe de cardinal n non commutatif ?

Exercice 25 *Caractérisation des groupes finis par le nombre de sous-groupes*

Soit $(G, *)$ un groupe.

1) Justifier que si G est fini, alors G possède un nombre fini de sous-groupes.
2) Réciproquement, on suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes.
   Tous les éléments de G sont-ils d'ordre fini ?
   L'ensemble G est-il fini ?

Exercice 26

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 27

Soit n un entier naturel supérieur à 4 et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Existe-t-il un lien entre la parité de l'ordre de σ et sa signature ?

Exercice 28 *Classique*

Quels sont les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même ?
Indication : Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

On raisonne par récurrence.

1) Soit $x \in G$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{P}_n$ la proposition « $f(nx) = nf(x)$ ».

• Initialisation

Par définition, $0x = 0_G$ et $0f(x) = 0_{G'}$.
Par ailleurs, puisque f est un morphisme, $f(0_G) = 0_{G'}$.
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} f\big((n+1)x\big) &= f(nx+x) && \text{car } f \text{ est un morphisme} \\ &= f(nx) + f(x) && \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= nf(x) + f(x) && \text{par définition} \\ &= (n+1)f(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x).$$

2) Soient $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Puisque f est un morphisme, on a $f(nx) = -f(-nx)$.
Or, $-nx = (-n)x$ et $-n \in \mathbb{N}$, donc $f(-nx) = (-n)f(n)$.
Finalement $f(nx) = -(-n)f(x) = nf(x)$.
On a montré :

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(nx) = nf(x).$$

3) En notations multiplicatives, on obtient :

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f\left(x^n\right) = \left(f(x)\right)^n.$$

Exercice 2

Soit $r \in \mathbb{Q}$. On choisit $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = p/q$.
En utilisant les images des itérés d'un élément par un morphisme (voir exercice 1) on a :

$$\begin{aligned} qf(r) &= qf\left(\tfrac{p}{q}\right) && f(qx) = qf(x), \text{ car } f \text{ est un morphisme} \\ &= f\left(q\tfrac{p}{q}\right) && q\tfrac{p}{q} = p = p \cdot 1 \\ &= pf(1) \end{aligned}$$

En divisant l'égalité par q, on obtient $f(r) = rf(1)$.

CORRECTIONS

Exercice 3

1) En étudiant les images successives de chacun des éléments de $[\![1, 9]\!]$, on obtient :
$\sigma(1) = 3, \sigma(3) = 8, \sigma(8) = 1$. De même, $\sigma(2) = 7, \sigma(7) = 2$.
Et $\sigma(4) = 9, \sigma(9) = 6, \sigma(6) = 5, \sigma(5) = 4$.
Donc :

$$\sigma = \langle 1, 3, 8\rangle \circ \langle 2, 7\rangle \circ \langle 4, 9, 5, 7\rangle.$$

2) • Signature

La transposition $\tau = \langle 2, 7\rangle$ est de signature -1. Le cycle $c_3 = \langle 1, 3, 8\rangle$ est de signature $+1$ et le cycle $c_4 = \langle 4, 9, 5, 7\rangle$ est de signature -1.
La signature étant un homomorphisme de groupe, on a :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(c_3)\varepsilon(c_4) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1.$$

• Ordre

Deux cycles de supports disjoints commutant pour la composition, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\sigma^p = \tau^p \circ c_3^p \circ c_4^p.$$

La transposition $\tau = \langle 2, 7\rangle$ est d'ordre 2. Le cycle $c_3 = \langle 1, 3, 8\rangle$ est d'ordre 3 et le cycle $c_4 = \langle 4, 9, 5, 7\rangle$ est d'ordre 4.
On en déduit que l'ordre de σ est égal à $\mathrm{ppcm}(2, 3, 4) = 12$.

Remarque
On peut déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en calculant le nombre d'inversions de σ. On trouve qu'il y a 22 couples (i, j) tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{22} = 1$. Mais il est plus rapide d'utiliser la décomposition en cycles. Quant à déterminer l'ordre de σ en calculant successivement σ^2, σ^3, etc., ce serait déraisonnable.

Exercice 4

On a $12 = 2^2 \cdot 3, 18 = 2 \times 3^2$ et $-27 = -3^3$. Le PGCD de ces trois nombres est donc 3.
Donc le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par $\{12, 18, -27\}$ est $3\mathbb{Z}$.

Remarque
On peut détailler par double inclusion en notant G le groupe engendré par $\{12, 18, -27\}$.

$\subset$ Les trois nombres sont des multiples de 3.
Ainsi $G \subset 3\mathbb{Z}$ (car G est le plus petit sous-groupe contenant $\{12, 18, -27\}$).

$\supset$ On a $1 = 45 - 44 = 5 \cdot 9 - 11 \cdot 4$, donc $3 = 5 \cdot 27 - 11 \cdot 12$. En particulier, $3 \in G$.
Donc G contient aussi le sous-groupe engendré par 3. D'où, $3\mathbb{Z} \subset G$.