Raisonnements 1

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Disjonction des cas (parité)*

1) Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $n^3 - 3n$ est pair.

2) Simplifier l'expression suivante : $$-\frac{(-1)^{n^3-1} \cdot (-1)^{3n+2}}{-(-1)^{8n-1}}.$$

Exercice 2 *Disjonction des cas (min et max)*

Le maximum de deux nombres x et y est noté $\max(x,y)$.
De même, $\min(x,y)$ désigne le minimum des deux nombres x et y.

1) Démontrer que

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

2) Trouver une formule similaire pour $\max(x,y,z)$, le maximum des trois nombres x, y et z.

Exercice 3 ⋆ *Sommes, produits et récurrence*

1) Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2) Soient $a_1, \dots, a_n$, des réels supérieurs à 1. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Exercice 4 ★★ *Suite de Wallis*

On définit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

1) Donner la valeur de W_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p+1} = \frac{4^p \cdot (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

En utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, traduire par une proposition mathématique chacune des affirmation suivantes :

1) aucun réel n'a pour carré -1 ;

2) si le produit de deux réels est strictement négatif, alors l'un des deux est strictement négatif ;

3) l'ensemble A contient un nombre entier strictement positif pair ;

4) les carrés des nombres de A sont aussi des carrés de nombres appartenant à l'ensemble B.

Exercice 6 Considérons les quatre énoncés suivants :

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$

3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$

4) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$

Donner la négation des ces énoncés. Préciser lesquels de ces énoncés sont vrais.

Exercice 7 ★ Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

On considère les quatre énoncés mathématiques suivants :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \ \text{ou}\ g(x) = 0.$

2) $\big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\big) \ \text{ou}\ \big(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0\big).$

3) $\exists x \in \mathbb{R} :\ f(x) = 0 \ \text{et}\ g(x) = 0.$

4) $\big(\exists x \in \mathbb{R} :\ f(x) = 0\big) \ \text{et}\ \big(\exists x \in \mathbb{R} :\ g(x) = 0\big).$

Montrer que les énoncés 1 et 2 ne sont pas équivalents, puis que les énoncés 3 et 4 ne sont pas équivalents.

Indication. *On pourra utiliser les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_1(x) = x + |x|, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x - |x| \quad \text{et} \quad f_4(x) = x + 1.$$

Exercice 8 ⋆ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit deux nouvelles fonctions p et i par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

1) Justifier que p et i sont respectivement paire et impaire.
2) En déduire que toute fonction se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
3) Est-ce que cette décomposition est unique ?

Exercice 9 ⋆⋆ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et u la suite définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors la suite u est monotone.
Indication. *On pourra faire une disjonction des cas :* $f(0) \leqslant 0$ *ou* $f(0) > 0$.

Exercice 10 ⋆⋆ *Raisonnement par l'absurde et limite*

Soit u une suite de réels telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ${u_n}^2 = {u_n}^n + 3u_n - 2$.
On suppose que la suite converge. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 11 ⋆⋆ *Analyse-synthèse pour une équation fonctionnelle*

L'objectif est ici de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\big(x - f(y)\big) = 2 - x - y.$$

1) On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie cette propriété.
   a) Prouver que $f(0) = 1$.
   b) En déduire que$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x-1) = 2 - x$.
   c) En déduire une expression de $f(x)$ pour tout réel x.
2) Conclure.

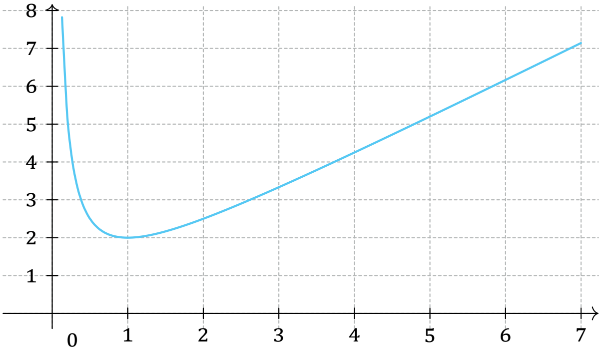
Exercice 12 ⋆⋆

1) a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x(1-x) \leqslant 1/4$.
   b) Soient a, b et c trois réels dans $[0,1]$. Prouver que l'un au moins des nombres suivants est inférieur à $1/4$:

$$a(1-b), \qquad b(1-c) \quad \text{et} \quad c(1-a).$$

2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
   En adaptant le raisonnement précédent, justifier que, parmi les trois nombres $a + 1/b$, $b + 1/c$ et $c + 1/a$, il existe au moins un nombre supérieur à 2.

Exercice 13 ★★ On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + 1/x$. Voici le graphe de f.



1) Discuter, en fonction de la valeur de $k \in \mathbb{Z}$, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
   a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f(\alpha)f(\alpha^{n+1}) = f(\alpha^n) + f(\alpha^{n+2})$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha^n) \in \mathbb{Z}$.
   c) Que dire si $n \in \mathbb{Z}$?

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14 Soient $A =]0,1[$ et $B =]0,2[$.

Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais ?

1) $\forall x \in A, \quad \exists y \in B : y < x.$
2) $\exists y \in B : \quad \forall x \in A, \quad y < x.$
3) $\exists y \in B : \quad \forall x \in A, \quad x < y.$

Exercice 15 ★ Trouver la meilleure valeur de a pour laquelle le raisonnement par récurrence suivant soit correct. Justifiez votre réponse :

Affirmation. Pour tout $x \geqslant a$, et tout entier $n \geqslant 2$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
Preuve. Soit $x \geqslant a$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\mathcal{P}(n) : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

- **Initialisation.** $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geqslant 1 + 2x$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geqslant (1+nx)(1+x) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\geqslant 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geqslant 1 + (n+1)x
\end{aligned}
$$

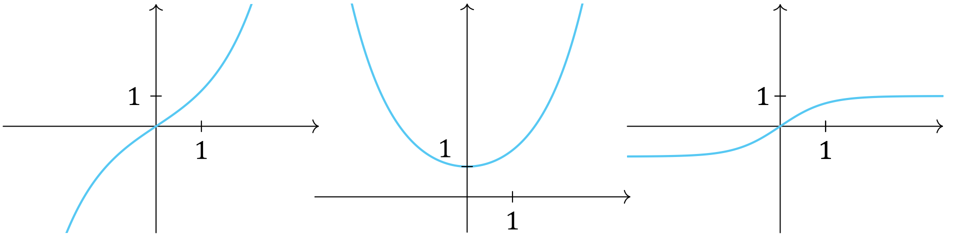
Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\qquad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$

Exercice 16 ⋆ On définit trois fonctions $c, s, t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad s(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{s(x)}{c(x)}.$$

Voici le graphe de ces trois fonctions :



1) Associer à chaque graphe une expression.
2) Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x) = c(-x).$
b) $\exists x \in \mathbb{R} : \quad t(x) = t(-x).$
c) $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad t(x) \geqslant A.$
d) $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,$
$\qquad \big(c(x) = c(x') \Rightarrow x = x'\big).$
e) $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,$
$\qquad \big(s(x) = s(x') \Rightarrow x = x'\big).$
f) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad c(x) = y.$
g) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists !\, x \in \mathbb{R} : \quad s(x) = y.$
h) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[,$
$\qquad 1/2 \leqslant t(x) \leqslant 1.$
i) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},$
$\qquad \big(x \geqslant \alpha \Rightarrow |t(x) - 1| \leqslant \varepsilon\big).$
j) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t'(x) > 0.$

Exercice 17 ⋆ Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\,u_{n+1} - 3\,u_n + 4u_{n-1} = 0\ ?$$

Exercice 18 ⋆⋆⋆ *Un exemple de récurrence dite « forte »*

Soient c un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = c \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Calculer u_1 et u_2. Quelle conjecture simple en déduit-on sur la valeur de u_n ? La prouver.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Disjonction des cas (parité)*

1) On remarque que $n^3 - 3n = n(n^2 - 3)$.
   - Si $n = 2p$ est pair, alors $n^3 - 3n = 2p(n^2 - 3)$ est pair.
   - Si $n = 2p + 1$ est impair, alors $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est impair. Donc $n^2 - 3$ est pair. Donc $n^3 - 3n$ est pair aussi dans ce cas.

   En conclusion, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ l'entier } n^3 - n \text{ est pair.}}$

2) Comme $n^3 - 3n$ est pair,

$$-\frac{(-1)^{n^3-1} \cdot (-1)^{3n+2}}{-(-1)^{8n-1}} = (-1)^{n^3-1}(-1)^{3n+2}(-1)^{-8n+1} = (-1)^{n^3-3n}(-1)^{-2n+2} = \boxed{1.}$$

Exercice 2 *Disjonction des cas (min et max)*

1) Soient x et y deux réels. Procédons par disjonction des cas.
   - Si $x \leqslant y$ alors $\max(x,y) = y$ et $|x - y| = -(x - y)$. D'où

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = y.$$

   On a bien $$\max(x,y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

   - On procède de même pour vérifier l'égalité dans le cas $y \leqslant x$.

   Dans tous les cas, la première relation est vérifiée.

   On peut procéder de la même manière pour le minimum, ou utiliser le résultat précédent en écrivant

$$\min(x,y) = -\max(-x, -y) = -\frac{-x - y + |-x + y|}{2} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

2) Soient x, y et z trois réels.

$$\begin{aligned}
\max(x,y,z) &= \max\big(x, \max(y,z)\big) && \text{question précédente} \\
&= \frac{x + \max(y,z) + |x - \max(y,z)|}{2} && \text{de nouveau, la question précédente} \\
&= \frac{x + \frac{y+z+|y-z|}{2} + \left|x - \frac{y+z+|y-z|}{2}\right|}{2}.
\end{aligned}$$

   Après simplifications, $$\boxed{\max(x,y,z) = \frac{2x + y + z + |y - z| + \big|2x - y - z - |y - z|\big|}{4}.}$$

Exercice 3 *Sommes, produits et récurrence*

1) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec la proposition

$$\mathcal{P}(n): \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

• **Initialisation.** Par convention, un produit et une somme sur l'ensemble vide valent respectivement 1 et 0. Ainsi, puisque $1 \geqslant 1 + 0$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Soient a_1, a_2, ..., a_{n+1} des réels positifs. Alors

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = (1+a_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) = \prod_{i=1}^{n}(1+a_i) + a_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i).$$

Or par hypothèse de récurrence, $$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1.$$

Par hypothèse $a_{n+1} \geqslant 0$, donc $$a_{n+1}\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant a_{n+1}.$$

Alors, il vient $$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) \geqslant \left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_{i+1}.$$

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) On applique l'inégalité précédente aux réels positifs $a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$.

Exercice 4 *Suite de Wallis*

1) Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = 0$.

2) Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(p) : W_{2p+1} = \dfrac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier positif p.

• **Initialisation.** Par convention, $0! = 1$. Donc $\dfrac{4^0 (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1 = W_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

CORRECTIONS

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie.

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= W_{(2p+1)+2} && \text{par hypothèse sur } W \\
&= \frac{(2p+1)+1}{(2p+1)+2} W_{2p+1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{2(p+1)}{2p+3} \cdot \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} && \times \tfrac{2(p+1)}{2p+2} = 1 \\
&= \frac{2(p+1)}{2p+3} \cdot \frac{2(p+1)}{2p+2} \cdot \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{4 \cdot 4^p \big((p+1) \cdot p!\big)^2}{(2p+3)(2p+2) \cdot (2p+1)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent
$$W_{2(p+1)+1} = \frac{4^{p+1}\big((p+1)!\big)^2}{\big(2(p+1)+1\big)!}$$

et la proposition $\mathcal{P}(p+1)$ est prouvée.

- **Conclusion.** La proposition $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

On commence par reformuler en utilisant « tout » et « il existe ».

1) Tout réel a un carré différent de -1. D'où la formule mathématique

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -1.}$$

2) Pour tout couple (x,y) de réels, si le produit est strictement négatif, alors x est strictement négatif ou y est strictement négatif. C'est-à-dire

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(xy < 0\big) \quad \Rightarrow \quad \big(x < 0 \quad \text{ou} \quad y < 0\big).}$$

3) Il existe un élément n de A tel que $n/2$ soit un entier strictement positif.

$$\boxed{\exists\, n \in A : \quad n/2 \in \mathbb{N}^*.}$$

4) Si x est un élément de A, alors son carré est le carré d'un élément de B, c'est-à-dire qu'il existe y dans B tel que $x^2 = y^2$:

$$\boxed{\forall\, x \in A, \quad \exists\, y \in B, \quad x^2 = y^2.}$$