1 Compléments de calcul algébrique

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x}$
	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^2.\frac{1-x^9}{1-x}$
		x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^3.\frac{1-x^8}{1-x}$
			x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^4.\frac{1-x^7}{1-x}$
				x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^5.\frac{1-x^6}{1-x}$
					x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^6.\frac{1-x^5}{1-x}$
						x^7	x^8	x^9	x^{10}	$x^7.\frac{1-x^4}{1-x}$
							x^8	x^9	x^{10}	$x^8.\frac{1-x^3}{1-x}$
								x^9	x^{10}	$x^9.\frac{1-x^2}{1-x}$
									x^{10}	$x^{10}.\frac{1-x}{1-x}$
x	$2x^2$	$3x^3$	$4x^4$	$5x^5$	$6x^6$	$7x^7$	$8x^8$	$9x^9$	$10x^{10}$	

Une somme en triangle.

Le calcul de la somme de chaque colonne est immédiat.
La somme de chaque ligne est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
Le calcul se fait donc sans problème (on a supposé $x \neq 1$).
En égalant les deux manières de calculer la somme de tous les termes du carré, on obtient

$$\sum_{k=1}^{10} kx^k = \sum_{k=1}^{10} x^k \frac{1-x^{11-k}}{1-x}$$

Or le membre de droite se calcule aussi avec des suites géométriques... On retrouve le résultat de l'exercice n° 5.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Formule du binôme de Newton*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur des sommes suivantes :

1) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}$, 2) $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, 3) $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k$,

4) $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 5^{n-k}$, 5) $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k}$, 6) $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k/2}$.

Exercice 2

Montrer, à l'aide de la formule de Pascal, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}.$$

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$.

1) Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Vérifier $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

2) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

Exercice 4 *Formule du pion*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2) En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = 2n5^{n-1}$.

Exercice 5 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

Soient x un réel et $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1) Rappeler les valeurs de $S_n(1)$ et de $T_n(1)$.

2) Pour $x \neq 1$, rappeler la valeur de $S_n(x)$, calculer $(1-x)T_n(x)$ et en déduire $T_n(x)$.

3) Pour $x \neq 1$, retrouver $T_n(x)$ en remarquant que $T_n(x) = S_n'(x)$.

Exercice 6 *Sommes doubles*

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1) $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} (i+j) \right)$. 2) $B_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{i} ij \right)$. 3) $C_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \max(i,j) \right)$.

Exercice 7 *Classique*

1) Expliciter deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le produit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

Exercice 8 *Produit d'entiers pairs (respectivement impairs) consécutifs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (2k) = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n) \text{ et } q_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1).$$

Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n et q_n à l'aide de factorielles.

Exercice 9 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{n+1} - 1$.

Exercice 10 Calculer la somme $S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \binom{n}{i}(j+i)$.

Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \cos(\pi/4)\cos(\pi/8)\cdots\cos(\pi/2^{n+2}) = \prod_{k=0}^{n} \cos(\pi/2^{k+2}).$$

1) Rappeler la valeur de p_0.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier p_n à l'aide de l'égalité $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sommes A_n et B_n suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 2^k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k.$$

1) Justifier que A_n et B_n sont des entiers et que $A_n + \sqrt{2}B_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}$.

2) Montrer que $A_n^2 - 2B_n^2 = 1$.

3) Préciser de même des entiers C_n et D_n tels que $C_n + \sqrt{2}D_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}$.
Donner la valeur $C_n^2 - 2D_n^2$.

Exercice 13 *Somme dans un colonne du triangle de Pascal*

1) Montrer que pour tous p et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant p$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1} \qquad (\star)$$

2) Retrouver, à l'aide de $(\star)$, la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$, puis celle de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 14 *Somme double*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{i+j} \right) = \frac{n^2}{2}.$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j}$.

Exercice 15 *Somme triangulaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} \right) = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Exercice 16 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{k+1}$.

2) En déduire :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

3) Montrer que $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n}$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Tous les calculs qui suivent utilisent $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

1) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = (1-1)^n = 0$, car $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque

Pour $n = 0$, on aurait $S_0 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} 1^k (-1)^{0-k} = \binom{0}{0} 1^0 (-1)^{0-0} = 1$.

2) $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Remarque

Ce résultat montre que la somme de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.

3) Pour $k = 0$, on a $2^k = 2^0 = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$. D'où :

$$U_n = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = -1 + (2+1)^n = -1 + 3^n.$$

4) De même, pour $k = n$, on a $5^{n-k} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$. D'où :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 1^k 5^{n-k} - 1 + (1+5)^n = -1 + 6^n.$$

5) $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

6) On a $2^{k/2} = \left(2^{k/2}\right)^k = \left(\sqrt{2}\right)^k$. Donc :

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{2}\right)^k = \left(1 + \sqrt{2}\right)^k.$$

Exercice 2

Rappelons que la formule de Pascal donne la valeur de la somme de deux coefficients adjacents (colonnes k et $k+1$) d'une même ligne m du triangle de Pascal :

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$ ».

CORRECTIONS

- Initialisation

  On a $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{p+k}{k} = \binom{p}{0} = 1$ et $\binom{p+1}{0} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors en isolant le dernier terme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}\right) + \binom{p+n+1}{n+1} \\ &= \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} && \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \binom{p+n+1+1}{n+1}. && \text{formule de Pascal}\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.

Exercice 3

1) Puisque $p \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ et $\binom{k}{p}$ s'expriment à l'aide de factorielles et on a :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{p!} \cdot \frac{1}{(n-k)!(k-p)!}.$$

De même, $p \leqslant n$ et $n-k \leqslant n-p$ donc :

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-p-k+p)!} = \frac{n!}{p!} \cdot \frac{1}{(k-p)!(n-k)!}.$$

D'après ces deux égalités, on a $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

2) Si $k < p$, on a $\binom{k}{p} = 0$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} &= 0 + \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} \\ &= \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p} && \text{d'après 1)} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n-p}{k-p} && \text{linéarité} \\ &= \binom{n}{p} \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^{i+p} \binom{n-p}{i} && \text{changement d'indice} \\ &= \binom{n}{p} (-1)^p \sum_{i=0}^{n-p} \binom{n-p}{i} (-1)^i && (-1)^{i+p} = (-1)^p(-1)^i \\ &= \binom{n}{p} (-1)^p (1-1)^{n-p}. && \text{formule du binôme}\end{aligned}$$

Donc $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}$, car $0^{n-p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \in [\![1, n-1]\!] \end{cases}$.

Exercice 4

1) Comme $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Puisque k et n sont non nuls, on a $k! = k(k-1)!$ et $n! = n(n-1)!$. D'où :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Comme $(n-1)-(k-1) = n-1-k+1 = n-k$, on a montré $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

2) On commence par isoler le terme pour $k = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k 3^{n-k} &= 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^k 3^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^k 3^{n-k} && \text{question précédente} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}2^k 3^{n-k} && \text{linéarité de la somme} \\
&= n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}2^{i+1} 3^{n-1-i} && \text{changement d'indice} \\
&= 2n\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}2^{i} 3^{n-1-i} && \text{linéarité de la somme} \\
&= 2n(2+3)^{n-1} && \text{formule du binôme} \\
&= 2n5^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 *Somme de termes d'une suite géométrique et application*

1) On a $S_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et on sait que $T_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) On sait que pour $x \neq 1$, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x).

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \\
xT_n(x) &= x + 2x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n && L_1 - L_2 \\
(1-x)T_n &= 1 + x + \cdots + x^{n-1} - nx^n && \sum_{k=0}^{n-1} x^k = S_{n-1}(x) = \frac{1-x^n}{1-x} \\
&= \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \neq 1, \quad T_n(x) = \frac{1 - x^n - nx^n(1-x)}{(1-x)^2}.$$

3) Pour $x \neq 1$, $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et par linéarité de la dérivation, $T_n(x) = S_n'(x)$. Donc :

$$\forall x \neq 1, \quad T_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$

Exercice 6

1) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j \right) && \text{i ne dépend pas de j, } \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} \right) && \text{linéarité de la somme} \\
&= (n+1) \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n+1)}{2} && \text{Card}[\![0,n]\!] = n+1 \\
&= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(n+1) \\
&= n(n+1)^2.
\end{aligned}$$

2) En utilisant la linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{i} j \right) && \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2 \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \frac{i(i+1)}{2} && \text{linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} i^2 && \sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \ \sum_{i=0}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2 + 3n + 4n + 2) \\
&= \frac{n(n+1)}{24}(3n^2 + 7n + 2).
\end{aligned}$$

3) • Première méthode

Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\sum_{j=0}^{n} \max(i,j) = i + i + \cdots + i + (i+1) + (i+2) + \cdots + n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \max(i,j) &= \sum_{j=0}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j && \text{i ne dépend pas de j, on fait apparaître } \sum_{j=0}^{n} j \\
&= i(i+1) + \sum_{j=0}^{n} j - \sum_{j=0}^{i} j && \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2 \\
&= i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{i(i+1)}{2}.
\end{aligned}$$