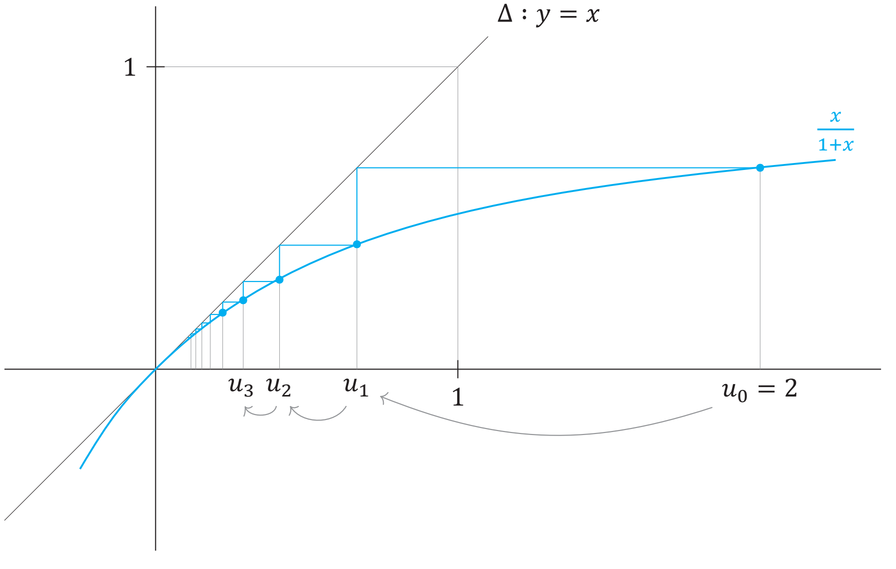
Techniques de raisonnements 1



Dans l'exercice n° 2, on étudie la suite u définie par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

Sur la figure ci-dessus, on a représenté graphiquement les premiers termes de cette suite.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers naturels.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \in \,]0,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.

1) Préciser u_1 et u_2 en fonction de u_0.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n et u_0.
   Indication : On pourra considérer $1/u_n$.

Exercice 3

Soit $x \in \,]-1,+\infty[\, \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a :

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Exercice 4 *Classique*

Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.
2) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
3) Préciser pour $p \in \mathbb{N}$, W_{2p}.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Montrer, à l'aide d'arguments élémentaires, que pour un entier naturel n :

$$n \text{ est un multiple de } 6 \iff n \text{ est un multiple de 3 et est pair.}$$

Exercice 6

1) Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $\sqrt{2x^2+1} = x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Les nombres x et y étant réels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2)(x+y) &= 0 \\ (x+2)(y+1)(x-y) &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 8

Soient les quatre assertions suivantes :

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0\,;$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0\,;$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y>0\,;$
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2>x.$

Traduire chacune d'elles par une phrase en français. Préciser si elles sont vraies ou fausses. Lorsqu'elle est fausse, écrire sa négation avec des quantificateurs.

Exercice 9

Soient A, B et C des ensembles.

1) Établir l'équivalence :

$$(A \cup B = B \cap C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \subset B \subset C).$$

2) Établir l'implication :

$$B \neq C \quad \Longrightarrow \quad (A \cap B \neq A \cap C \text{ ou } A \cup B \neq A \cup C).$$

Indication : On pourra raisonner par contraposition.

Exercice 10

Démontrer, en le déterminant, qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 2^n \geqslant (n+2)^2.$$

Exercice 11 ★★ *Inégalité arithmético-géométrique*

1) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1, stable par passage au prédécesseur et par passage au double. On a donc pour tout $n \in A$, les deux implications suivantes :
   - $n \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad 2n \in \mathcal{A},$
   - $(n+1) \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad n \in \mathcal{A}.$

   Montrer que $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$.
2) Application

   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ réels strictement positifs :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}.$$

Exercice 12 ★★

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et croissante.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$p_{n,k} = (u_1 u_2 \cdots u_k)^n \qquad \text{et} \qquad q_{n,k} = (u_1 u_2 \cdots u_k \cdots u_n)^k.$$

1) Préciser les expressions de $p_{2,2}$, $q_{2,2}$, $p_{3,2}$ et de $q_{3,2}$.
2) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une longueur exprimée en mètre.
En quelle(s) unité(s) seront exprimés $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$) ?
3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$(u_1 u_2 \cdots u_k)^n \leqslant (u_1 u_2 \cdots u_k \cdots u_n)^k.$$

4) Application
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad M_p \leqslant 2^{1/2} M_{p-1}^{1/2} M_{p+1}^{1/2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Indication : On pourra poser pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 2^{k-1} \dfrac{M_k}{M_{k-1}}$.

D'après Centrale-Supelec 2001 PC 1

Exercice 13

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n} = a_n, \quad a_{2n+1} = 1 - a_n.$$

1) Déterminer a_{224}.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n la somme des chiffres de l'écriture binaire de n.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1-(-1)^{d_n}}{2}$.

Exercice 14 ★★

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant $f(n+1) > f\big(f(n)\big)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tous n et m entiers naturels :

$$f(m) \leqslant n \quad \Longrightarrow \quad m \leqslant n.$$

2) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15

Soient x et y deux rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ ne soient pas rationnels.
Le nombre $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ peut-il être rationnel ?

Exercice 16

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E.
Soient A et B des parties de E.
Est-il vrai que $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$? et $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$?

Exercice 17 ★★ *Nombres harmoniques*

Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, le nombre rationnel $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ peut-il être un entier ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ ».
   - Initialisation
     On a $a_0+b_0\sqrt{2}=1+0=0$ et $\left(1+\sqrt{2}\right)^0=1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité
     Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :
$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}&=\left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)\\&=\left(a_n+b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)&&\text{d'après }\mathcal{P}(n)\\&=a_n+2b_n+(a_n+b_n)\sqrt{2}\\&=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}.&&a_{n+1}=a_n+2b_n,\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{aligned}$$
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.
2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}(n)$: « $a_n\in\mathbb{N}$ et $b_n\in\mathbb{N}$ ».
   - Initialisation
     L'assertion $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, car $a_0=1$ et $b_0=0$ sont des entiers naturels.
   - Hérédité
     Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
     On a alors $a_n\in\mathbb{N}$ et $b_n\in\mathbb{N}$, donc $a_{n+1}=a_n+2b_n\in\mathbb{N}$.
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers naturels.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a_n^2 - 2b_n^2$.

On a $x_0 = 1^2 - 0 = 1$. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 \\ &= (a_n + 2b_n)^2 - 2(a_n + b_n)^2 \\ &= -a_n^2 + 2b_n^2 \\ &= -x_n. \end{aligned}$$

$(a+2b)^2 = a^2 + 4b^2 + 4ab$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

On a ainsi une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme 1, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n.$$

Remarque

On pouvait aussi remarquer $a_n^2 - 2b_n^2 = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)$, montrer par récurrence $a_n - b_n\sqrt{2} = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$ et conclure par :

$$a_n^2 - 2b_n^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n = (1-2)^n = (-1)^n.$$

Exercice 2

1) On obtient $u_1 = \frac{u_0}{u_0+1}$ puis $u_1 + 1 = \frac{2u_0+1}{u_0+1}$ d'où $u_2 = \frac{u_1}{u_1+1} = \frac{u_0}{2u_0+1}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ».

- Initialisation

  On a $u_0 \in]0, +\infty[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors $u_n > 0$, donc $u_n + 1 > 0$, puis $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+1} > 0$. Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Remarque

Cela prouve que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définis.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = 1/u_n$ (u_n est non nul d'après la question précédente).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n+1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} = 1 + v_n$.

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1 : $v_n = v_0 + n$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{v_0+n} = \frac{u_0}{1+nu_0}$.

Remarque

On pouvait conjecturer « $u_n = \frac{u_0}{nu_0+1}$ » dès la question 1) et le prouver par récurrence.

Exercice 3

Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $(1+x)^n > 1 + nx$ ».

- Initialisation

  On a $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, car x étant différent de 0, $x^2 > 0$.
- Hérédité

  Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  On a alors :
  $$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &> (1+x)(1+nx) \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et } 1+x>0 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &> 1 + (n+1)x. \quad x^2 > 0\end{aligned}$$
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que pour $n \geqslant 2$, $(1+x)^n > 1 + nx$.

Remarque

Pour $x > 0$, on peut prouver le résultat à l'aide de la formule du binôme :
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$$
comme $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et, x étant positif, $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$ l'est aussi, on en déduit le résultat.

Exercice 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ ».
   - Initialisation

     On a $W_1 = 1$ et $W_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $(0+1)W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.
     Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité

     Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :
     $$\begin{aligned}(n+2)W_{n+2}W_{n+1} &= (n+2)\tfrac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= \tfrac{\pi}{2}.\end{aligned}$$
     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

2) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Q}(p)$: « $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ ».
   - Initialisation

     On a $0! = 1$, $1! = 1$ et $2^0 = 1$ donc $\frac{2^0(0!)^2}{1!} = 1$ et comme $W_1 = 1$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

- Hérédité

  Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $Q(p)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} &= W_{2p+3} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \cdot \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} && \text{d'après } Q(p) \\
&= (2p+2)^2 \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)(2p+2)(2p+1)!} && (2p+3)! = (2p+3)(2p+2)! = (2p+3)(2p+2)(2p+1)! \\
&= 2^2(p+1)^2 \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)!} && (p+1)! = (p+1)p! \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}.
\end{aligned}$$

  Donc $Q(p+1)$ est vraie.

  On a montré par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

3) En utilisant les deux questions précédentes :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2(2p+1)W_{2p+1}} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

On raisonne par double implication.

$\Longrightarrow$ Soit n un multiple de 6. Il existe un entier naturel q tel que $n = 6q$.
Comme $q_2 = 3q \in \mathbb{N}$ et $n = 2q_2$, n est pair.
De même, $n = 3q_3$ avec $q_3 = 2q \in \mathbb{N}$ donc n est un multiple de 3.

$\Longleftarrow$ Soit n un multiple de 3 et de 2. Il existe un entier naturel q tel que $n = 3q$.
Comme n est pair, q est pair (si q était impair, $3q$ le serait aussi).
Donc il existe un entier naturel q' tel que $q = 2q'$.
Finalement $n = 3(2q') = 6q'$ et n est un multiple de 6.

Exercice 6

1) L'équation faisant intervenir $|x+1|$, on envisage deux cas selon le signe de $x+1$.

- Premier cas $x \in]-\infty, -1[$

  On a alors à résoudre $-(x+1) = 2x+1$ d'inconnue $x < -1$.

$$-x - 1 = 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -2/3.$$

  Or $-2/3 \notin]-\infty, -1[$, il n'y a pas de solution $x < -1$.